1. 集合：$\cup$. $\cap$. C_UA. 不等式解法：$x^2-2x-3<0$，$|x-1|<1$，$\frac{x+1}{x-2}<2$

子集：一个集合有n个元素，则有2^n个子集，有2^n-1的真子集，有2^n-2非空真子集.

真子集：集合A中任意元素均为集合B的元素，且B中至少有一个元素不是集合A中元素

若$A\subseteq B$，但存在$x\in B$，且$x\notin A$，则称A为B的真子集，记作：$A\subsetneqq B$

空集是所有非空集合的真子集

$A=\{a_1, a_2, a_3 \cdots a_n\}$　　$\underset{C_n^0}{\underset{\|}{1}}+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=2^n$

$A=\{x|y=\sqrt{x}+1\}$　$x\in[0,+\infty)$

$B=\{y|y=\sqrt{x}+1\}$　$y\in[1,+\infty)$

$C=\{(x,y)|y=\sqrt{x}+1\}$

$z=a+bi$，$\bar{z}=a-bi$

2. 复数：$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$，$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ (考的多)　$\boxed{z=\frac{2+i}{1+i}\quad |z|=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}}$

$|z^n|=|z|^n$，$\bar{z}\cdot z=|z|^2$

第二象限 $-a+bi$	第一象限 $a+bi$
第三象限 $-a-bi$	第四象限 $a-bi$

---

3. 命题：
- 原命题：若p则q
- 否命题：若$\neg p$则$\neg q$
- 逆命题：若q则p
- 逆否命题：若$\neg q$，则$\neg p$

注：需要是陈述句.

真假性一致　　真假性一致

命题的否定是只否定结论

p: $\forall x\in R$，$x^2+x+1\geq 0$

$\neg p$: $\exists x\in R$，$x^2+x+1<0$

$p\wedge q$ 且
$p\vee q$ 或
$\neg p$ 非

p是q的充分不必要条件
条　　结

不等式关系 $\boxed{小\Rightarrow 大}$

范围小的 $\Rightarrow$ 范围大的

条件 $\Rightarrow$ 结论　充分性
结论 $\Rightarrow$ 条件　必要性

> 文字游戏：
>
> $x\in A$的充分不必要条件是$x\in B$
>
> $\Downarrow$
>
> $x\in B$是$x\in A$的充分不必要条件
>
> $B\Rightarrow A$

> $P=\{x|x^2-8x-20\leq 0\}$　$-2\leq x\leq 10$
>
> $S=\{x|1-m\leq x\leq 1+m\}$　小$\Rightarrow$大
>
> 若$\boxed{x\in P}$(大)是$\boxed{x\in S}$(小)的必要条件，求m范围？
>
> $\begin{cases}1-m\geq -2\\1+m\leq 10\\1-m\leq 1+m\end{cases}$　$\therefore \boxed{\begin{cases}m\leq 3\\m\leq 9\\m\geq 0\end{cases}}$ 取交集　故：$m\in[0,3]$
>
> 若$\boxed{x\in P}$(小)是$\boxed{x\in S}$(大)的充分条件，求m范围？
>
> $\begin{cases}1-m\leq -2\\1+m\geq 10\\1-m\leq 1+m\end{cases}$　$\therefore \begin{cases}m\geq 3\\m\geq 9\\m\geq 0\end{cases}$　$\therefore m\in[9,+\infty)$

4、函数：

① 定义域：

$\log_2 x \geq -\frac{3}{2} = -\frac{3}{2}\times 1 = -\frac{3}{2}\times \log_2 2 = \log_2 2^{-\frac{3}{2}} = \log_2 \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} = \log_2 \frac{\sqrt{2}}{4}$ ∴ $x \geq \frac{\sqrt{2}}{4}$

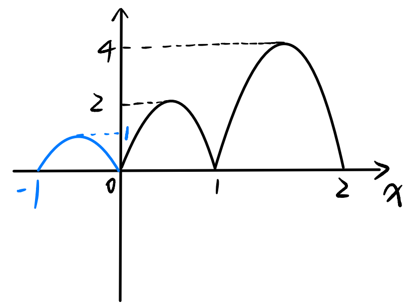
$\log_{\frac{1}{2}} x \geq -\frac{3}{2} \Rightarrow -\log_2 x \geq -\frac{3}{2} \Rightarrow \log_2 x \leq \frac{3}{2}\times 1 = \log_2 2\sqrt{2}$，$x \in (0, 2\sqrt{2}]$

若已知 $f(x)$ 定义域 $[0,1]$
则 $0 \leq \log_2 x \leq 1$

$y = f(\log_2 x)$，$y = f(x)$
$y = f(x^2+1)$
括号内定义域是一样的

② 对应法则：

(1) $f(x) = \frac{1}{2} f(x+1)$ ⇒ 左移1个单位，纵压缩 $\frac{1}{2}$



(2) 待定系数法：

eg：若 $f(x)$ 为二次函数，$f(0)=1$，且 $f(x+1) - f(x) = 2x$，则 $f(x) = ?$

$f(x) = ax^2+bx+c$，$f(0)=1$，$c=1$

令 $x=0$，$f(1)=f(0)$
令 $x=-1$，$f(0)-f(-1)=-2$

$\begin{cases} b+a=0 \\ b-a=-2 \end{cases}$　$\begin{cases} b=-1 \\ a=1 \end{cases}$

必须写新元取值范围!!!

(3) 换元法：

eg：若 $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$，则 $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ $(x \neq -1)$

令：$\frac{1-x}{1+x} = t$，∵ $x \neq -1$ 故 $t \neq -1$，$x = \frac{1-t}{1+t}$

$f(t) = \frac{1-\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2}{1-\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2} = \frac{2t}{t^2+1}$

(4) 配凑法：

eg：$f(2^x) = x \cdot \log_3 2 + 233$，求解析式：$f(x) = \log_3 x + 233$
$= \log_3 2^x + 233$

eg：$f\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}$，$f(x) = x(x^2-3)$，$x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right) = \left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 3\right]$

$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$
$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

(5) 求谁设谁：

eg：2019理2：$f(x)$为奇，当$x<0$时，$f(x) = -e^{ax}$，若 $f(\ln 2) = 8$，求 a？

设：$x>0$
有 $-x<0$，$f(-x) = -e^{-ax}$

∵ $f(x)$奇函数，
∴ 当$x>0$时，$f(x) = -f(-x) = e^{-ax}$

则 $f(\ln 2) = e^{-a\ln 2} = 8$
∴ $a = -3$

eg：已知 $f(x+2)=-f(x)$，当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=2x-x^2$，求 $f(x)$ 在 $[-2,0]$ 上的解析式.

设：$x\in[-2,0]$

有：$x+2\in[0,2]$

故：$f(x+2)=2(x+2)-(x+2)^2$

$=-x^2-2x$

又∵ $f(x+2)=-f(x)$　∴ $-f(x)=-x^2-2x$　∴ $f(x)=x^2+2x$

(6) 利用对称关系求解析

$y=f(x)$ 关于 $y=x$ 对称（反函数）　eg：$y=e^{x+1}$ 就将 $x\to y$，$y\to x$ 求解即可

$y=f(x)$ 关于 $y=x+a$ 对称：$(1,3)\xrightarrow[x=y-5]{y=x+5}(-2,6)$

技巧：

只能 $k=\pm1$ 时用

$(x_0,y_0)\xrightarrow{\text{关于}y=x\text{对称}}(y_0,x_0)$

$(x_0,y_0)\xrightarrow[x=y-a]{\text{关于}y=x+a\text{对称}}(y_0-a,x_0+a)$

$(x_0,y_0)\xrightarrow[x=b-y]{\text{关于}y=-x+b\text{对称}}(b-y_0,b-x_0)$

任意：$(x_0,y_0)\xrightarrow[\text{对称}]{\text{关于}Ax+By+C=0}(x,y)$

$$x=x_0-2A\cdot\frac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2}$$

$$y=y_0-2B\cdot\frac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2}$$

eg：$(1,2)$ 关于 $x-2y+5=0$

$$x=1-2\times1\times\frac{1-4+5}{5}$$

$$y=2-2\times(-2)\times\frac{1-4+5}{5}$$

eg：2015年I卷文数12T：设 $f(x)$ 与 $y=2^{x+a}$ 的图像关于直线 $y=-x$ 对称，且 $f(-2)+f(-4)=1$，求 a？

$f(x)$ 图象上任意一点 (x,y) 关于 $\boxed{y=-x \atop x=-y}$ 对称的点 $(-y,-x)$ 在函数 $y=2^{x+a}$ 上

故：$-x=2^{-y+a}$

整理：$-y+a=\log_2(-x)$　则：$f(x)=a-\log_2(-x)$

∵ $f(-2)+f(-4)=1$

∴ $a-\log_2 2+a-\log_2 4=1$　∴ $a=2$

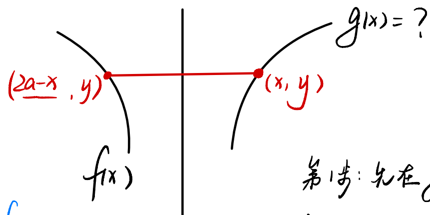
eg：$y=2^{x+1}$ 关于 $y=-x+3$ 对称后的解析式：

设：(x,y)

$(x,y)\xrightarrow[x=3-y]{\text{关于}y=-x+3\text{对称}}(3-y,3-x)$ 一定在 $y=2^{x+1}$ 上，代入 $3-x=2^{3-y+1}$

$\log_2(3-x)=4-y$

(5) $y=f(x)$ 关于 $x=a$ 对称：



中点坐标公式：$\frac{x_1+x_2}{2}=x_{中点}$

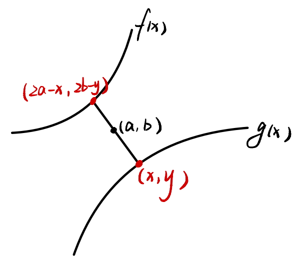
第1步：先在 $g(x)$ 上随意找一个点设为 (x,y)

第2步：对称到 $f(x)$ 上

第3步：代入 $f(x)$ 的解析式.

$g(x)=y=f(2a-x)$

$y=f(x)$ 关于 (a,b) 对称



$2b-y=f(2a-x)$ $\quad y=2b-f(2a-x)$

(6) 方程组法：$\overset{奇}{f(x)}+\overset{偶}{g(x)}=e^x$

让 x 全为 $-x$：$f(-x)+g(-x)=e^{-x}$

$-f(x)+g(x)=e^{-x}$

$\xrightarrow[-]{+}$ $\begin{cases} g(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \\ f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \end{cases}$

求最值的方式.

③ 值域： 100%考

二次型 / $\frac{一次}{一次}$ / $\frac{二次}{一次}$ / $\frac{一次}{二次}$ / $\frac{二次}{二次}$ / 三角换元 / 求导 / 均值不等式 / 线性规划

(1) 二次型：$y=\cos 2x+\sin x=1-2\sin^2 x+\sin x=-2t^2+t+1$，$t\in[-1,1]$

$y=\cos 2x+\cos x=2\cos^2 x-1+\cos x$

$y=\sin 2x+\sin x+\cos x=2\sin x\cdot\cos x+\underbrace{\sin x+\cos x}_{t}$

$=t^2-1+t$，$t\in[-\sqrt2,\sqrt2]$

$\sin x+\cos x=t$ 两侧平方.

$1+2\sin x\cdot\cos x=t^2$

$y=e^{2x}+e^{-2x}+(\underbrace{e^x+e^{-x}}_{t})=t^2-2+t$，$t\in[2,+\infty)$

$e^x+e^{-x}=t$

$t^2=e^{2x}+e^{-2x}+2$

2014国Ⅱ, 21T：$y=e^x-e^{-x}-2x$

(2) $\frac{一次}{一次}$：

分离常数

$y=\frac{2x+1}{x+1}=\frac{2(x+1)-1}{x+1}=2-\frac{1}{x+1}$

$y=\frac{4k^2+3}{2k^2+1}=\frac{2(2k^2+1)+1}{2k^2+1}=2+\frac{1}{2k^2+1}$

$\frac{1}{2k^2+1}\in(0,1]$

$\therefore 2+\frac{1}{2k^2+1}\in(2,3]$

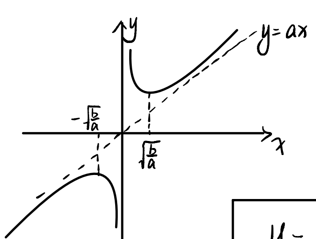
$\boxed{y=\frac{cx+d}{ax+b}\ ,\ y\neq-\frac{c}{a}}$

$y=\frac{k^2}{2k^2+1}=\begin{cases} k=0, & 0 \\ k\neq0, & \frac{1}{2+\frac{1}{k^2}}\in(0,\frac12) \end{cases}\Rightarrow[0,\frac12)$

$y=\frac{(2k^2+3)(4k^2+1)}{2k^2+1}=\frac{(t+2)(2t-1)}{t}=\frac{2t^2+3t-2}{t}=2t-\frac{2}{t}+3$

$t=2k^2+1\geq1$ $\quad 2t-\frac{2}{t}+3\in[3,+\infty)$

(3) $\frac{二次}{一次}$：$y=ax+\frac{b}{x}$ $(a>0, b>0)$

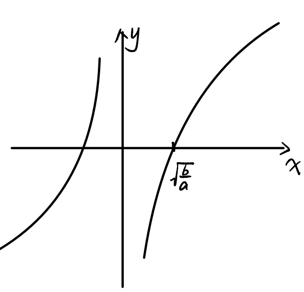


定义域：$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

值域：$(-\infty,-2\sqrt{ab}]\cup[2\sqrt{ab},+\infty)$

$\boxed{y=ax-\frac{b}{x}}$

$a>0, b>0$



$a+b\geq2\sqrt{ab}$

$y=\frac{(2k^2+2)(4k^2+1)}{(2k^2+1)^2}$ 均值：$y\leq\frac{\frac14(6k^2+3)^2}{(2k^2+1)^2}=\frac94$

$\frac14\cdot[3(2k^2+1)]^2$

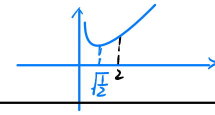
当且仅当 $2k^2+2=4k^2+1$

通用：$y=\frac{(2k^2+2)(4k^2+3)}{(2k^2+1)^2}=\frac{(t+1)(2t+1)}{t^2}=\frac{2t^2+3t+1}{t^2}$

令：$2k^2+1=t$ $\quad =2+\frac{3}{t}+\frac{1}{t^2}$ $\quad t\geq1$

2019国II: $y=\frac{k^3+k}{(2k^2+1)(k^2+2)}=\begin{cases} k=0, & 0 \\ k\neq 0, & \frac{k+\frac{1}{k}}{(2k+\frac{1}{k})\cdot(k+\frac{2}{k})}=\frac{k+\frac{1}{k}}{2k^2+\frac{2}{k^2}+5}=\frac{k+\frac{1}{k}}{2(k+\frac{1}{k})^2+1}=\frac{t}{2t^2+1}=\frac{1}{2t+\frac{1}{t}}\in(0,\frac{2}{9}]\end{cases}$

$k+\frac{1}{k}=t\geq 2$



求导求最值: 高次函数 $y=x^3-2x^2+x+1$

超越函数 $y=\cos 2x\cdot\sin x=(1-2\sin^2 x)\cdot\sin x=-2t^3+t$, $-1\leq t\leq 1$ ⇒ 首先化为同角.

2018国I 16T: $y=2\sin x+\sin 2x$

$y'=2\cos x+2\cos 2x$
$=2(2\cos^2 x+\cos x-1)$
$=2(2\cos x-1)(\cos x+1)$

2017国I 16T: 立体几何

三角换元: $x^2+y^2=1$ 圆

椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上 $P(x,y)$, $z=x+2y$ 范围. $\begin{cases}x=2\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$

$z=2\cos\theta+2\sin\theta$
$=2\sqrt{2}\cdot\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\in[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$

均值不等式: (会背公式)

- $a^2+b^2\geq 2ab$
- $a+b\geq 2\sqrt{ab}$, 一正二定三相等
- $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\geq\frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}}$
- $a^3+b^3+c^3\geq 3abc$
- $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$

一正: $a>0$, $b>0$
二定: $a+b$ 和为定值 or ab 积为定值
三相等: 当 $a=b$ 时, 取等条件.

$\frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m}<1<\frac{a+n}{b+n}<\frac{a}{b}$ $\left(\begin{array}{l}a>b>0\\ m>0,n>0\end{array}\right)$

小于1同加则变大
大于1同加则变小

① 1的代换: $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$, 求 $2a+b$ 的 min $\longrightarrow(2a+b)\cdot(\frac{1}{a}+\frac{2}{b})$

② 求谁留谁: (如三角形) $a+b=ab-3$, 求 ab 范围? 求 $a+b$ 范围?

$a+b\geq 2\sqrt{ab}$
$(a+b)^2\geq 4ab=4(a+b+3)$
$(a+b)^2-4(a+b)-12\geq 0$ ∴ $a+b\geq 6$

1   2
1   -6

绝对值不等式: $|a|-|b|\leq|a+b|\leq|a|+|b|$

去绝对值:

① $|2x-1|\leq x\longrightarrow -x\leq 2x-1\leq x$

② $|2x-1|\leq|x-1|\longrightarrow$ 两侧平方 (两侧都要非负才行)

eg: $1\geq -2$
$1^2\leq(-2)^2$

③ $|2x-3|+|x-3|\geq 9\longrightarrow$ 零点分段法

$x<\frac{3}{2}$, $(3-2x)+(3-x)\geq 9$, $x\leq -1$
$\frac{3}{2}\leq x<3$, $(2x-3)+(3-x)\geq 9$, $x\geq 9$ 舍
$x\geq 3$, $(2x-3)+(x-3)\geq 9$, $x\geq 5$

$x\leq -1$ or $x\geq 5$

线性规划: $z=2x+y$, $z=2x-y$, $z=\frac{y}{x}$, $z=x^2+y^2$

$y=-2x+z$ $y=2x-z$

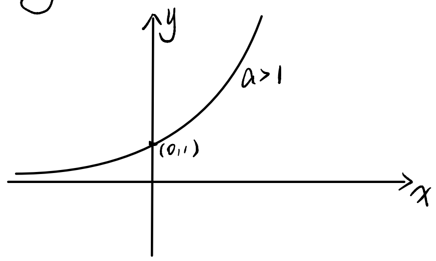
指数：

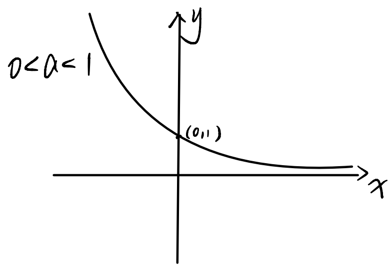
$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$，$(ab)^n=a^n\cdot b^n$，$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$，$(a^n)^m=a^{nm}$

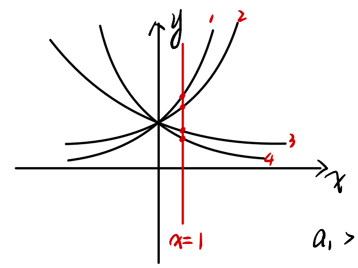
$\Downarrow$

$f(x)\cdot f(y)=f(x+y)$　　$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$，$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$　$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$，$\sqrt{x^2}=|x|$

$y=a^x$（$a>0$，且 $a\neq 1$）



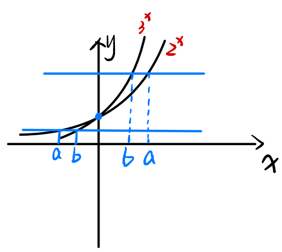




$a_1>a_2>a_3>a_4$

当 $x=1$ 时，$y=a^x\longrightarrow y=a$

eg：$2^a=3^b$，问 a _ b？



① $a>b>0$

② $a=b=0$

③ $a<b<0$

对数：

$y=2^{x+1}\longrightarrow\log_2 y=x+1$

$f(x)+f(y)=f(xy)$

$\Downarrow$

$\log_a M+\log_a N=\log_a MN$

$\log_a M-\log_a N=\log_a\frac{M}{N}$

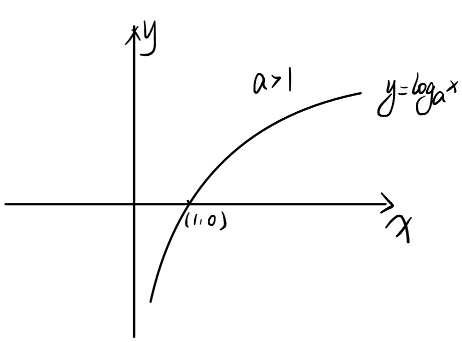
$\log_{a^n} b^m=\frac{m}{n}\cdot\log_a b$

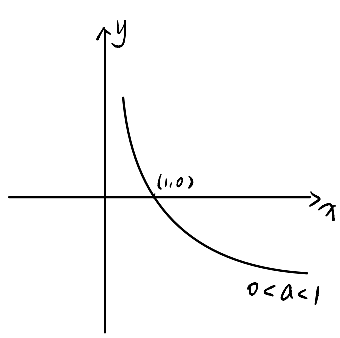
$a^{\log_a N}=N$

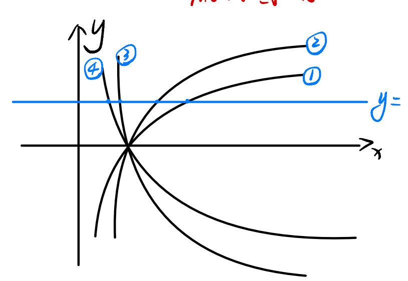
$\log_a b=\frac{\ln b}{\ln a}=\frac{\lg b}{\lg a}$

$2^{-\log_4 3}=2^{\log_{2^2}3^{-1}}=2^{\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

底大图低

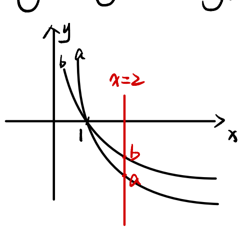






当 $y=1$ 时，$y=\log_a x\longrightarrow a=x$

eg：$\log_a 2<\log_b 2<0$



$1>a>b>0$

反函数：$y=a^x$，反：$y=\log_a x$

2012全国12T：$y=\frac{1}{2}e^x$，$y=\ln(2x)$

$x=\frac{1}{2}e^y$　把x写成y，把y写成x

$\boxed{e^y=2x}$

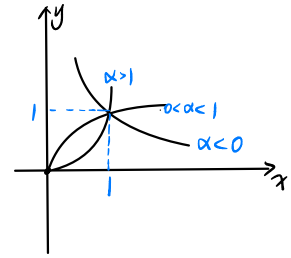
$\boxed{y=\ln 2x}$

一身 互为反函数

幂函数： $y=x^{\alpha}$ $(\alpha\in R)$ 画图像

第1步：第1象限：

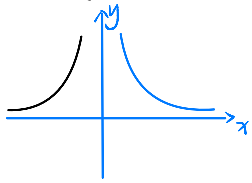
第2步：定奇偶



$y=x^{-\frac{2}{3}}$

$=\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$

$=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ 偶函数



$\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{5}} \underline{<} \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{5}}$ $\quad y=x^{\frac{3}{5}}\uparrow$

函数性质：

一、单调性：$x_1,x_2\in I$，$x_1<x_2$，$f(x_1)<f(x_2)$ $\uparrow$

① 定义：$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ $\uparrow$

② 复合函数单调性：同增异减

$y=2^{x^2+2x} \longrightarrow \uparrow$ 为 $[-1,+\infty)$

$y=2^{u}$，$u=x^2+2x$

$\uparrow \qquad \uparrow (-1,+\infty)$

③ $\uparrow+\uparrow=\uparrow$

$\downarrow+\downarrow=\downarrow$

$\uparrow-\downarrow=\uparrow+\uparrow=\uparrow$

$\downarrow-\uparrow=\downarrow$

若 $f(x)\uparrow \Rightarrow \begin{cases} -f(x) & \downarrow \\ \frac{1}{f(x)} & \downarrow \\ \sqrt{f(x)} & \uparrow \end{cases}$

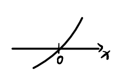
$\uparrow+\downarrow=$ 不一定是增还是减

（求导判断）

$f(x)\uparrow$，$g(x)\uparrow$，且 $f(x)\geq 0$，$g(x)\geq 0$

$\Rightarrow f(x)\cdot g(x)\uparrow$

$\Rightarrow f'(x)=e^x-\frac{1}{x+1}$



$\uparrow-\downarrow=\uparrow$

注：含参恒过定点问题：

$\square = \bigcirc\cdot\square$

参数

补：① a^x+b 此时令 $x=0$

② $\log_a^{3x+1}+b$ 此时令 $3x+1=1$

eg. $x+2nx+2ny-2n-2=0$

$2n(x+y-1)+(x-2)=0$

故：$\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-2=0 \end{cases}$

得：$\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

二、奇偶性

① $x\in D_f$，$-x\in D_f$，$f(-x)=f(x)$ 偶

$f(-x)=-f(x)$ 奇.

$\boxed{奇函数：f(0)=0 \text{ or } f(0)无意义}$

奇 + 奇 = 奇

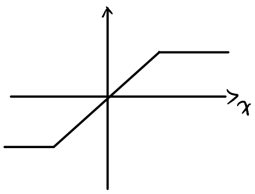
奇 × 奇 = 偶

奇 × 偶 = 奇

奇 + 偶 = 非奇非偶

② 常见奇函数：$y=kx$

$y=|x+a|-|x-a|$

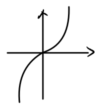


$y=\frac{k}{x}$

$y=ax+\frac{b}{x}$

$y=ax-\frac{b}{x}$

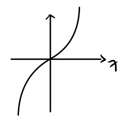
$y=x^3$



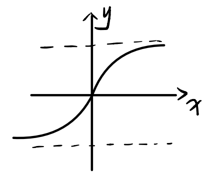
$y=\sin wx$，$y=\tan wx$

$y=e^x-e^{-x}$

$\uparrow - \downarrow$



$y=\frac{e^x+1}{e^x-1}$ / $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$



$y=\lg\frac{2-x}{2+x}$ / $y=\lg\frac{x+3}{x-3}$

$y=\lg(\sqrt{a^2x^2+1}\pm ax)$ 奇

$y=\lg(\sqrt{x^2+1}+x)$ $\uparrow$

③ 偶函数：$y=c \ (c\neq 0)$

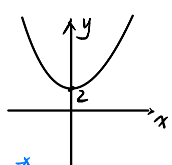
$y=ax^2+b$

$y=f(|x|)$

$y=\cos wx$

$y=e^x+e^{-x}$

$x\geq 0$，$y'=e^x-e^{-x}\geq 0$



$y=\ln(e^{mx}+1)-\frac{1}{2}mx \Leftarrow y=\ln(e^{3x}+1)+ax$ 偶，问 $a=?$

一定为偶.

$=\ln(e^{3x}+1)+\ln e^{ax}=\ln(e^{3x}+1)e^{ax}=\ln(e^{(a+3)x}+e^{ax})$

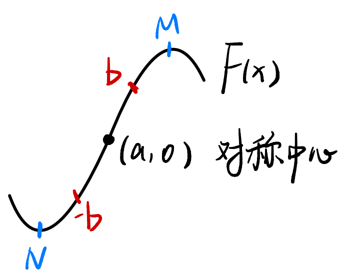
故：$a+3+a=0$

$a=-\frac{3}{2}$

题型：

① $F(x)=f(x)+a$

奇 + 常



$\begin{cases} F(b)+F(-b)=2a \\ F(M)+F(N)=2a \end{cases}$

2018国Ⅲ文数：$f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)+1$

$f(a)=4$，则 $f(-a)=$ $\underline{-2}$

② 求解析式

③ 先判断奇偶，再判断单调

对称轴：x反y同

$f(-x)=f(x)$ ， $x=0$ ，

$f(a-x)=f(a+x)$ ， $x=a$

$f(a-x)=f(b+x)$ ， $x=\frac{a+b}{2}$

对称中心：x, y都反

$f(-x)=-f(x)$ ， $(0,0)$

$f(a-x)=-f(a+x)$ ，关于 $(a,0)$

$f(a-x)=-f(b+x)$ ，关于 $(\frac{a+b}{2},0)$

$f(a-x)=-f(b+x)+c$ ， $(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2})$

周期：x同

$f(x+a)=f(x)$ $T=a$

$f(x+a)=-f(x)$ $T=2a$

$f(x+a)=f(x-a)$ ， $T=2a$

$\Rightarrow f(x+2a)=f(x)$

$f(x+a)=-f(x)+k$ ， $T=2a$

$\Rightarrow f(x+a+a)=-f(x+a)+k$

$=f(x)-k+k=f(x)$

$f(x+a)=\frac{k}{f(x)}$ ， $T=2a$

$f(x+2a)=f(x+a)-f(x)$ $T=6a$

$f(x+a)=\frac{1-f(x)}{1+f(x)}$ $T=2a$

eg: $a_1=1$ ， $a_2=3$ $x^2-x^2+1=0$ ， $\Delta<0$ ，有周期

$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$ ， $a_{2020}=?$

$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$

$x^2-px-q=0$ ， $\Delta<0$ 有周期

$\left.\begin{array}{l} a_1=1 \\ a_2=3 \\ a_3=2 \\ a_4=-1 \\ a_5=-3 \\ a_6=-2 \end{array}\right\}$ 找到规律了

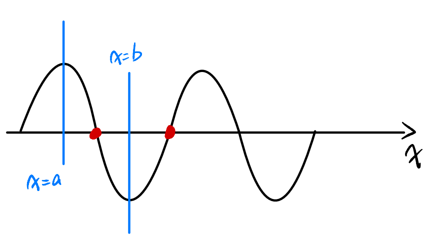
$a_7=1$

$a_8=3$

eg: $a_{n+1}=\frac{Ca_n+D}{Aa_n+B}$ 也为周期数列

$x=\frac{Cx+D}{Ax+B}$ $\Rightarrow$ $\Delta<0$ ，有周期

☆☆ 对称轴，对称中心，周期.



1° $f(x)$ 关于 $x=a$ ， $x=b$ 对称， $f(x)$ 为周期函数. $T=2|b-a|$

eg: $f(x)$ 为偶函数， $x=3$ 对称轴. $T=2\times3=6$

$x=0$ 对称轴

2° $f(x)$ 关于 $(a,0)$. $(b,0)$ 对称， $f(x)$ 为周期函数. $T=2|b-a|$

3° $f(x)$ 关于 $(a,0)$ ， $x=b$ 对称， $f(x)$ 为周期函数. $T=4|b-a|$

学会翻译:

$f(x+1)$ 为奇 $\Rightarrow$ $f(x+1)$ 关于 $(0,0)$ 对称、$\xrightarrow{\text{右移1单位}}$ $f(x)$ 关于 $(1,0)$ 对称.

$f(x+1)$ 为偶 $\Rightarrow$ $f(x+1)$ 关于 y 轴对称 $\xrightarrow{\text{右移1单位}}$ $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称.

$f(x)$ 为奇且周期 T $\Longrightarrow$ $f(\frac{T}{2})=0$ 证: $f(\frac{T}{2})=f(\frac{T}{2}-T)=f(-\frac{T}{2})=-f(\frac{T}{2})$

$\Rightarrow f(\frac{T}{2})=0$

图像:

1、$y=f(x)$ 与 $y=-f(x)$ 关于 x 轴对称.

$y=f(x)$ 与 $y=f(-x)$ 关于 y 轴对称

$y=f(x)$ 与 $y=f(x+a)+b$

$y=f(x)$ 与 $y=\frac{1}{2}f(x-2)$

问 $y=\lg(2-x)$ 怎么来的?

$y=\lg x \xrightarrow{y\text{轴}} \lg(-x) \xrightarrow{\text{右移2个单位}} \lg[-(x-2)]$

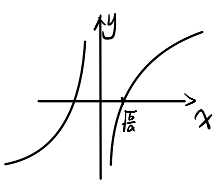
$=\lg(2-x)$

$y=\sin(\frac{\pi}{3}-2x)=\sin[-2(x-\frac{\pi}{6})]$ 往右平移 $\frac{\pi}{6}$

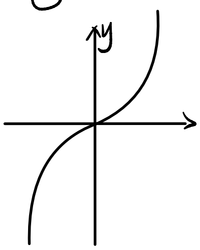
2、简单函数图像: 一次, 二次, 反比例, 指, 对, 幂, 三角函数

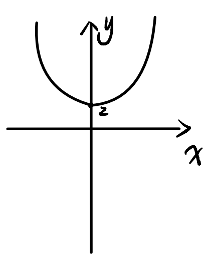
① $y=ax+\frac{b}{x}$

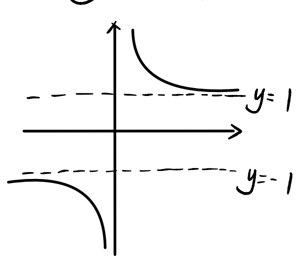
② $y=ax-\frac{b}{x}$

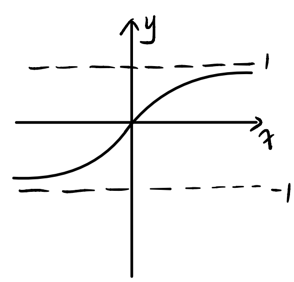


③ $y=e^x-e^{-x}$ / $y=e^x+e^{-x}$ / $y=\frac{e^x+1}{e^x-1}$ / $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$



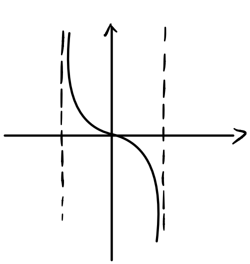




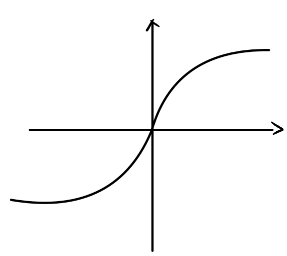


④ $y=\lg\frac{1-x}{1+x}$ $(-1<x<1)$

极限法作图

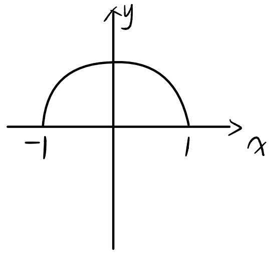


$y=\lg(\sqrt{x^2+1}+x)$ 奇 $(0,+\infty)\uparrow$ $(-\infty,0)\uparrow$



⑤ $y=\sqrt{1-x^2}$

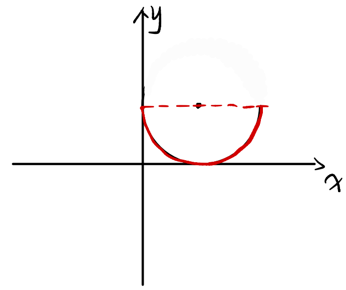
半圆 $y^2=1-x^2$



$y=1-\sqrt{2x-x^2}$

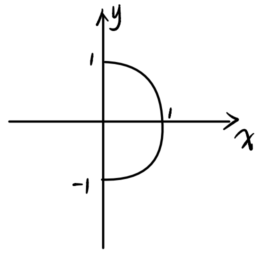
$(y-1)^2=2x-x^2$

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$



$x=\sqrt{1-y^2}$

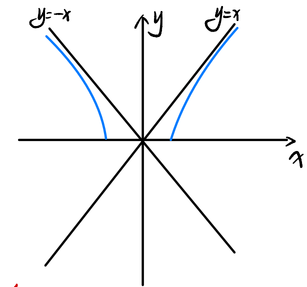
$x^2=1-y^2$



模拟了: $y=2\sqrt{1-x^2}$, $y=\sqrt{x^2-1}$

$\frac{y^2}{4}=1-x^2$ $\quad$ $y^2=x^2-1$

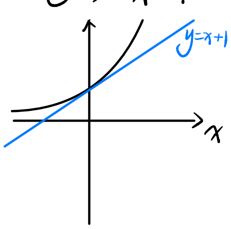
$\frac{y^2}{4}+x^2=1$ $\quad$ $x^2-y^2=1$



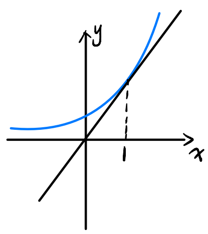
可以问 $y=x-1$ 与 $y=\sqrt{x^2-1}$ 有几个交点? 1个

⑥ 相切:

$e^x\geqslant x+1$



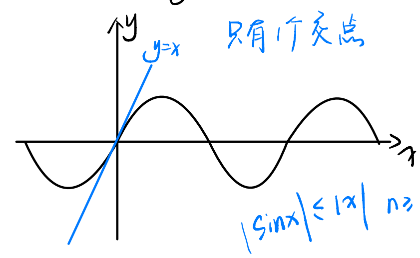
$e^x\geqslant ex$ $\quad x_{切点}=1$



变型: $e^{\frac{x}{2}}\geqslant\frac{e}{2}x$

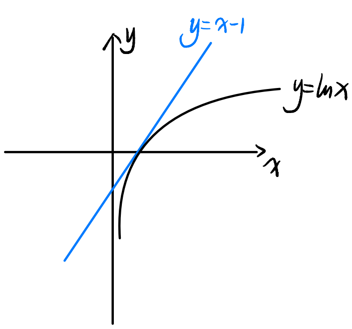
$e^x\geqslant\frac{e^2}{4}x^2$ 放缩技巧

$\sin x$ 与 $y=x$ 相切 $\quad$ 只有1个交点

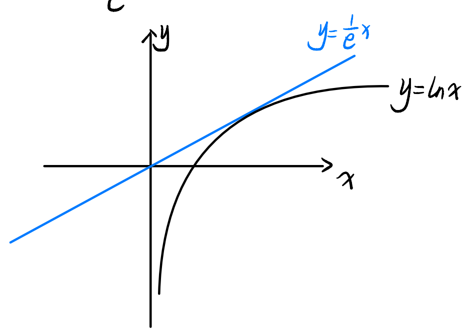


$|\sin x|\leqslant|x|$ $n\geqslant1$

$x-1\geqslant\ln x$



$\frac{1}{e}x\geqslant\ln x$



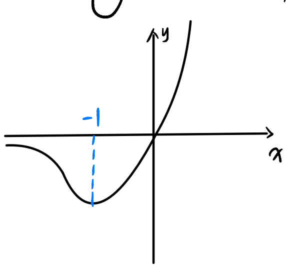
常用放缩:

① $e^x\geqslant x+1>x>x-1\geqslant\ln x\geqslant1-\frac{1}{x}$

② $e^x\geqslant ex$, $\frac{1}{e}x\geqslant\ln x$

⑦ 6个超越函数:

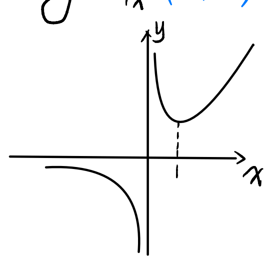
$y=x\cdot e^x$,



$-\infty\leftarrow x\rightarrow+\infty$

$0\leftarrow e^x\rightarrow+\infty$

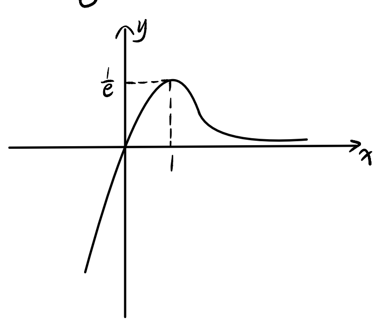
$y=\frac{e^x}{x}\ (x\neq0)$,



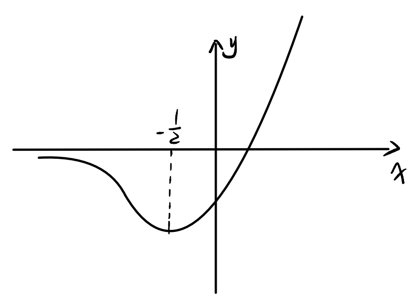
$-\infty\xleftarrow{-0时}x\xrightarrow{+0时}+\infty$

$0\xleftarrow{-\infty时}e^x\xrightarrow{+\infty时}+\infty$

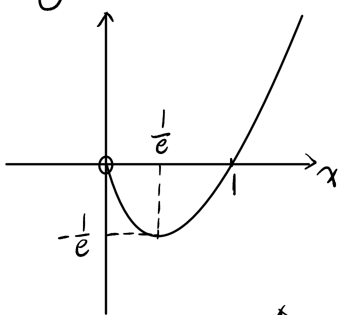
$y=\frac{x}{e^x}$



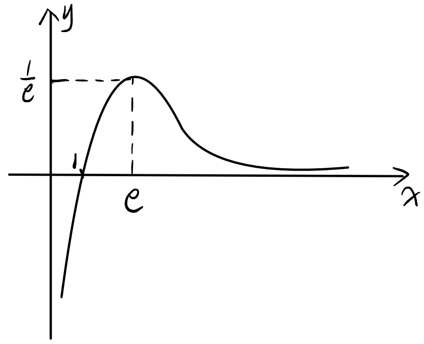
$y=(2x-1)\cdot e^x$



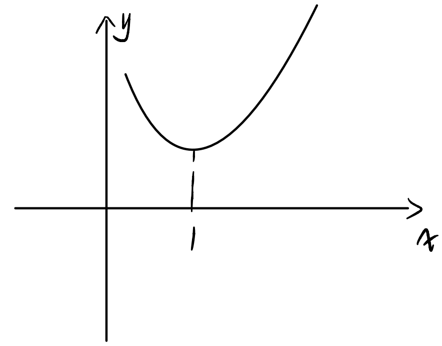
$y = x\cdot\ln x$ $(x>0)$



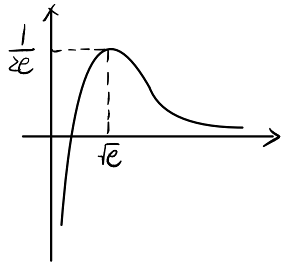
$y=\frac{\ln x}{x}$



$y=x-\ln x$



$y=\frac{\ln x}{x^2}$



零点：$f(x)=0$，$\Rightarrow x=x_0$ 零点

零点存在Th：$\boxed{f(x)\text{在}[a,b]\text{上连续}}$

$f(a)\cdot f(b)<0 \Rightarrow f(x)$ 在 (a,b) 内至少存在1个零点

$\Rightarrow$ + 单调 $\Rightarrow$ 有唯一个零点

考法1：零点所在区间，$f(a)\cdot f(b)<0$。

考点2：求零点个数

① 直接解方程

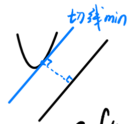
② 零点存在Th

③ 画图像找交点（一个函数变2个函数）

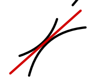
导数：

① 切线：

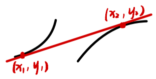
- 在点
- 过点
- 距离最值：



- 公切线：



$$\begin{cases} f(x_0)=g(x_0) \\ f'(x_0)=g'(x_0) \end{cases}$$



$$\begin{cases} y-y_1=f'(x_1)\cdot(x-x_1) \\ y-y_2=g'(x_2)\cdot(x-x_2) \end{cases}$$

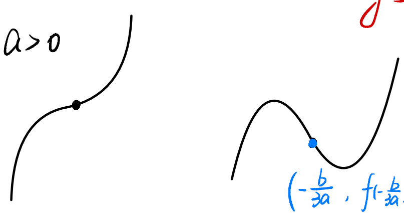
1. $c'=0$ （c为常数）
2. $(x^a)'=a\cdot x^{a-1}$ $(a\in Q$，且$a\neq 0)$
3. $(\sin x)'=\cos x$
4. $\cos x'=-\sin x$
5. $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$ $(a>0$，且$a\neq 1)$
6. $(e^x)'=e^x$
7. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ $(x>0, a>0$，且$a\neq 1)$
8. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$

1. $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$
2. $[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
3. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$ $(g(x)\neq 0)$

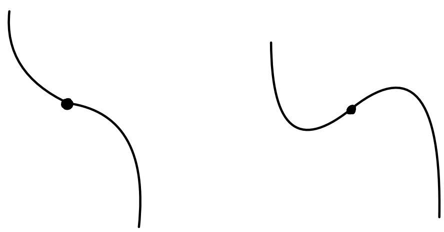
② 三次函数：$y=ax^3+bx^2+cx+d$

$y'=3ax^2+2bx+c$

$a>0$



$a<0$



三次函数的韦达定理：

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}$$

复合函数求导法则：

$y=f(g(x))$ 求导：

令 $y=f(u)$，$u=g(x)$

$y'_x=y'_u\cdot u'_x$ 分层 → 层层求导 → 作积

③ $f(x)$ 与 $f'(x)$ 不等式：

1° $x\cdot f'(x)+f(x)>0 \Rightarrow x\cdot f(x)\uparrow$

2° $xf'(x)-f(x)>0 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x}\uparrow$

3° $xf'(x)+nf(x)>0 \Rightarrow (x^n\cdot f(x))'=n\cdot x^{n-1}\cdot f(x)+x^n\cdot f'(x)$

$=x^{n-1}\cdot(x\cdot f'(x)+n\cdot f(x))$

4° $x\cdot f'(x)-n\cdot f(x)>0 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x^n}$

5° $f'(x)+f(x) \Rightarrow e^x\cdot f(x)\uparrow$

$f'(x)-f(x) \Rightarrow \dfrac{f(x)}{e^x}$

6° $f'(x)+n\cdot f(x)>0 \Rightarrow e^{nx}\cdot f(x)\uparrow$

7° $f'(x)+f(x)>2 \Rightarrow e^x\cdot[f(x)-2]\uparrow$

$e^xf'(x)+e^xf(x)>2e^x \Rightarrow [e^x\cdot f(x)]'-(2e^x)'>0$

8° $f'(x)\cos x-f(x)\cdot\sin x\geq 0 \Rightarrow f(x)\cdot\cos x$

$f'(x)\cdot\sin x+f(x)\cdot\cos x\geq 0 \Rightarrow f(x)\cdot\sin x$

9° $f'(x)\cos x+f(x)\sin x\geq 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{\cos x}$

$f'(x)\sin x-f(x)\cos x\geq 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{\sin x}$

10° $f'(x) > 2 \Rightarrow f(x) - 2x \uparrow$

$f'(x) > x \Rightarrow f(x) - \frac{1}{2}x^2 \uparrow$

eg: $f'(x)\cdot x\ln x + f(x) > 0 \quad \because x>0$

$f'(x)\cdot \ln x + f(x)\cdot \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow [f(x)\cdot \ln x]'$

11° $f'(x) > f(x)\cdot \tan x \quad (x\in(0,\frac{\pi}{2}))$

背几个常见值：

$\ln 2 = 0.6931$ $\sqrt{2} = 1.414$

$\ln 3 = 1.098$ $\sqrt{3} = 1.732$

$e = 2.71828$ $\sqrt{5} = 2.2360$

$e^2 = 7.3890$

④ 小T：极值、最值；恒成立求参；零点

⑤ 对数单身狗，指数找基友

1° 对数：若题目中出现 $g(x) = f(x)\cdot \ln x$，将 $f(x)$ 与 $\ln x$ 拆开

eg：求证 $e^x - 2x > x^2 \ln x$

将 x^2 与 $\ln x$ 拆开，$\because x>0$，$\therefore \frac{e^x-2x}{x^2} > \ln x$ 即 $\frac{e^x-2x}{x^2} - \ln x > 0$

设：$f(x) = \frac{e^x-2x}{x^2} - \ln x$

$f'(x) = \frac{(e^x-x)\cdot(x-2)}{x^3}$

又 $\because e^x - x > 0$

$\therefore$ 令 $f'(x) = 0$，解得 $x = 2$

故：$\begin{cases} 0<x<2, & f'(x)<0, \ f(x)\downarrow \\ x>2, & f'(x)>0, \ f(x)\uparrow \end{cases}$

$f(x)_{min} = f(2) = \frac{e^2-4-4\ln 2}{4} > \frac{e^2-7}{4} > 0$

2° 指数：若题目中出现 $g(x) = f(x) - e^x$，构造一个 $\frac{f(x)}{e^x}$

eg：$e^x - 2x > x^2 \ln x$

$\frac{x^2\ln x + 2x}{e^x} - 1 < 0$

设：$f(x) = \frac{x^2\ln x + 2x}{e^x} - 1$

$f'(x) = \frac{(2-x)\cdot(x\ln x+1)}{e^x}$

$\because x\ln x + 1 > 0$

$f'(x) = 0$，解 $x = 2$

$\begin{cases} 当 0<x<2 时，f'(x)>0, \ f(x)\uparrow \\ 当 x>2 时，f'(x)<0, \ f(x)\downarrow \end{cases}$

$\therefore f(x)_{max} = f(2) = \frac{4+4\ln 2}{e^2} - 1 < \frac{7}{e^2} - 1 < 0$

⑥ 函数隐零点处理技巧：

虚设零点，整体代换

⑦ 洛必达法则

满足 $\frac{0}{0}$ / $\frac{\infty}{\infty}$ 型式，可多次求导，直到求出为止

$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$

隐零点例题：$\boxed{\text{设而不求}}$

$$f(x)=e^x-ax-2$$

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间

$f'(x)=e^x-a$

若 $a\le 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，$f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)\uparrow$

若 $a>0$ 时，$f'(x)=0$，$x=\ln a$，$\begin{cases} x>\ln a, & f'(x)>0, \quad f(x)\uparrow \\ x<\ln a, & f'(x)<0, \quad f(x)\downarrow \end{cases}$

(2) 若 $a=1$，k 为整数，且当 $x>0$ 时，$(x-k)\cdot f'(x)+x+1\ge 0$，求 k 的最大值.

$(x-k)\cdot(e^x-1)+x+1\ge 0$

当 $x>0$ 时，整理：$x+\dfrac{x+1}{e^x-1}\ge k$

设：$g(x)=x+\dfrac{x+1}{e^x-1}\ (x>0)$

$g'(x)=\dfrac{-xe^x-1}{(e^x-1)^2}+1=\dfrac{e^x(e^x-x-2)}{(e^x-1)^2}$

设：$F(x)=e^x-x-2\ (x>0)$

$F'(x)=e^x-1$ 在 $x>0$ 时，$F'(x)>0$

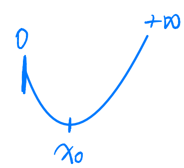
$F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上 $\uparrow$

$\because F(1)<0$，$F(2)>0 \longrightarrow 1<x_0<2$

$\because F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一零点.

$\boxed{\text{设：} g'(x_0)=0 \longrightarrow e^{x_0}-x_0-2=0}$ 虚设零点

故：$\begin{cases} 0<x<x_0, & g'(x)<0, \quad g(x)\downarrow \\ x>x_0, & g'(x)>0, \quad g(x)\uparrow \end{cases}$



故：$g(x_0)=x_0+\dfrac{x_0+1}{e^{x_0}-1}=\dfrac{x_0+1}{x_0+1}+x_0=x_0+1$

$e^{x_0}-x_0-2=0 \longrightarrow e^{x_0}=x_0+2$ 整体代换

$2<x_0+1<3$

$2<g(x_0)<3$

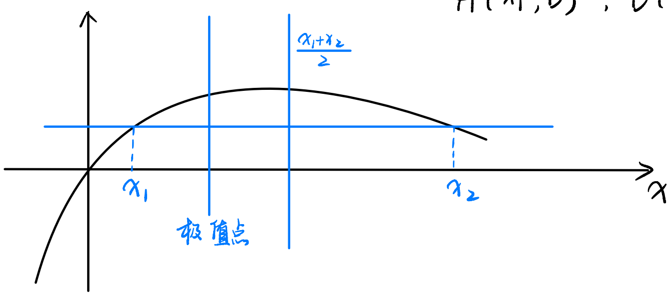
$2<g(x)_{min}<3$

k 的 max 为 2

⑧ 极值点偏移定义及判定Th

针对的单极值点函数

若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极值，且函数 $y=f(x)$ 与直线 $y=b$ 交于 $A(x_1,b)$，$B(x_2,b)$ 两点，则AB中点 $M(\frac{x_1+x_2}{2},b)$，而往往 $x_0\neq\frac{x_1+x_2}{2}$



[极值点左移]

题型：

1° 若 $f(x)$ 存在2个零点 x_1,x_2，且 $x_1\neq x_2$，求证：$x_1+x_2>2x_0$（x_0 为极值点）

2° 若 $f(x)$ 中存在 x_1,x_2，且 $x_1\neq x_2$，满足 $f(x_1)=f(x_2)$，求证：$x_1+x_2>2x_0$

3° 若 $f(x)$ 中存在2个零点 x_1,x_2，且 $x_1\neq x_2$，令 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，求证：$f'(x_0)>0$

4° 若 $f(x)$ 中存在 x_1,x_2，且 $x_1\neq x_2$，满足 $f(x_1)=f(x_2)$，令 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，求证：$f'(x_0)>0$

解题思路：

1° 讨论 $f(x)$ 单调性，并求出 $f(x)$ 的极值点 x_0

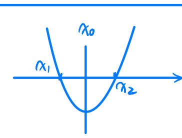
2° 构造 $F(x)=f(x)-f(2x_0-x)$ / $F(x)=f(x_0+x)-f(x_0-x)$

3° 求导 $F'(x)$，讨论 $F(x)$ 的单调性，判断 $F(x)$ 在某区间上的正负，并得出 $f(x)$ 与 $f(2x_0-x)$ 大小关系

4° ①设 $x_1<x_0<x_2$，通过 $f(x)$ 单调性，$f(x_1)=f(x_2)$，$f(x)$ 与 $f(2x_0-x)$ 大小关系得结论；

②若证 $f'(\frac{x_1+x_2}{2})<0$，还需讨论 $\frac{x_1+x_2}{2}$ 与 x_0 大小，得出 $\frac{x_1+x_2}{2}$ 单调区间，从而得出该处函数导数值的正负，从而得证.

实操：$f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ ↑，$(-\infty,x_0)$ ↓



构造：$F(x)=f(x)-f(2x_0-x)$

再求导 $F'(x)$，可得 $F(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上↑，那么 $F(x)>F(x_0)=f(x_0)-f(2x_0-x_0)=0$

可得：当 $x>x_0$ 时，$f(x)>f(2x_0-x)$，且 $x_1<x_0<x_2$，$f(x_1)=f(x_2)$

故：$f(x_1)=f(x_2)>f(2x_0-x_2)$，又∵ $x_1<x_0$，$2x_0-x_2<x_0$，∵ $f(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ ↓　∴ $x_1<2x_0-x_2$　∴ $x_1+x_2<2x_0$

若 $x_1+x_2<2x_0$，故 $\frac{x_1+x_2}{2}<x_0$，由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上↓，故 $f'(\frac{x_1+x_2}{2})<0$

例：已知 $f(x)=\ln x-ax^2+(2-a)x$

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性.

$f(x)$ 的定义域 $x>0$ ， $f'(x)=\frac{1}{x}-2ax+2-a=-\frac{(2x+1)(ax-1)}{x}$

①若 $a\le 0$ ， $f'(x)>0$ 恒成立， $f(x)\uparrow$

②若 $a>0$ ， $f'(x)=0$ ， $x=\frac{1}{a}$ ， $\begin{cases} 0<x<\frac{1}{a}, & f'(x)>0, \quad f(x)\uparrow \\ x>\frac{1}{a}, & f'(x)<0, \quad f(x)\downarrow \end{cases}$

(2) 设 $a>0$ ，证明 $0<x<\frac{1}{a}$ 时， $f(\frac{1}{a}+x)>f(\frac{1}{a}-x)$

设： $F(x)=f(\frac{1}{a}+x)-f(\frac{1}{a}-x)$

则： $F(x)=\ln(1+ax)-\ln(1-ax)-2ax$

$F'(x)=\frac{a}{1+ax}+\frac{a}{1-ax}-2a=\frac{2a^3x^2}{1-a^2x^2}$

当 $0<x<\frac{1}{a}$ 时， $F'(x)>0$ ， $F(x)\uparrow$

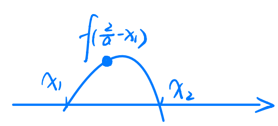
$F(0)=0$ ， $\therefore F(x)>0$

(3) 若 $f(x)$ 与 x 轴交于 A,B 两点，AB 的中点横坐标 x_0 ，证明： $f(x_0)<0$

$a>0$ ， $f(x)_{max}=f(\frac{1}{a})$

设： $A(x_1,0)$ 　 $B(x_2,0)$ ， $0<x_1<x_2$ ，则： $0<x_1<\frac{1}{a}<x_2$

由(2)得： $f(\frac{2}{a}-x_1)=f(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}-x_1)>f(x_1)=f(x_2)=0$



又∵ $f(x)$ 在 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 上 $\downarrow$ ，

$\frac{2}{a}-x_1<x_2$ ， $\therefore x_0=\frac{x_1+x_2}{2}>\frac{1}{a}$ 　 故： $f(x_0)<0$

双变量问题： $\begin{cases} \text{想办法化单变量.(eg: 韦达Th法)} \\ \text{代入消元法，主要还是变单变量.} \end{cases}$

比值 or 作差代换:

极值点偏移问题: 已知 $f(x)$ 的极值点 m, $f(a)=f(b)$, 让证明 $a+b>2m$

$a+b<2m$

$ab>m^2$

$ab<m^2$

……

$\boxed{\text{比值消元法:}}$

第1步: 根据 $f(x_1)=f(x_2)=0$ 建立等量关系

第2步: 等量关系中如果含参, 可考虑消参;

如果含指数式, 可考虑两边取对数.

第3步: 令 $\frac{x_2}{x_1}=t$ or $x_2-x_1=t$, 构造关于 t 的函数来证明.

例: $f(x)=x-a\cdot e^x$ 有两个不同的零点 x_1, x_2, 求证: $x_1+x_2>2$

$f'(x)=1-a\cdot e^x$ 有2个零点 $\begin{cases} x_1=a e^{x_1} \\ x_2=a\cdot e^{x_2} \end{cases}$

$x_1-x_2=a(e^{x_1}-e^{x_2})$ 即 $a=\frac{x_1-x_2}{e^{x_1}-e^{x_2}}$, 要证 $x_1+x_2>2$

只需证: $a\cdot(e^{x_1}+e^{x_2})>2$

即证: $(x_1-x_2)\cdot\frac{e^{x_1}+e^{x_2}}{e^{x_1}-e^{x_2}}>2$

$\boxed{\text{设: } x_1>x_2,\ t=x_1-x_2,\ t>0,\ e^t>1}$

只证: $t\cdot\frac{e^t+1}{e^t-1}>2$

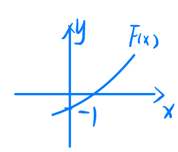
即: $(t-2)e^t+t+2>0$

记: $h(t)=(t-2)\cdot e^t+t+2\ (t>0)$

$h'(t)=(t-1)\cdot e^t+1$

又记: $F(x)=(t-1)\cdot e^t$ $\Longrightarrow$ 当 $t>0$ 时, $F'(t)>0$, $F(t)\uparrow$

$F'(x)=t\cdot e^t$　　$F(t)>F(0)=-1$



故: $t>0$ 时, $(t-1)e^t>-1$

$\therefore$ $h'(t)>0$ 在 $t>0$ 时.

故 $h(t)$ 在 $t>0$ 时 $\uparrow$

$h(t)>h(0)=0$

即: $(t-2)e^t+t+2>0$ 成立

所以: $x_1+x_2>2$

⑨ 同构：

1° $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>k \quad (x_1<x_2) \Rightarrow f(x_1)-f(x_2)<kx_1-kx_2 \Rightarrow f(x_1)-kx_1<f(x_2)-kx_2$

$\Rightarrow f(x)-kx$

2° $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\dfrac{k}{x_1x_2} \quad (x_1<x_2) \Rightarrow f(x_1)-f(x_2)>\dfrac{k(x_1-x_2)}{x_1x_2}=\dfrac{k}{x_2}-\dfrac{k}{x_1}$

$\Rightarrow f(x_1)+\dfrac{k}{x_1}>f(x_2)+\dfrac{k}{x_2} \Rightarrow f(x)+\dfrac{k}{x}$

3° 指对互化：

(1) $ae^a\le b\ln b$
$$\begin{cases} e^a\ln e^a\le b\ln b \longrightarrow f(x)=x\cdot\ln x \\ a\cdot e^a\le(\ln b)\cdot e^{\ln b} \longrightarrow f(x)=x\cdot e^x \\ a+\ln a\le\ln b+\ln(\ln b) \longrightarrow f(x)=x+\ln x \end{cases}$$

(2) $\dfrac{e^a}{a}<\dfrac{b}{\ln b}$:
$$\begin{cases} \dfrac{e^a}{a}<\dfrac{e^{\ln b}}{\ln b} \longrightarrow f(x)=\dfrac{e^x}{x} \\ \dfrac{e^a}{\ln e^a}<\dfrac{b}{\ln b} \longrightarrow f(x)=\dfrac{x}{\ln x} \\ a-\ln a<\ln b-\ln(\ln b) \longrightarrow f(x)=x-\ln x \end{cases}$$

(3) $e^a\pm a>b\pm\ln b$:
$$\begin{cases} e^a\pm a>e^{\ln b}\pm\ln b \longrightarrow f(x)=e^x\pm x \\ e^a\pm\ln e^a>b\pm\ln b \longrightarrow f(x)=x\pm\ln x \end{cases}$$

(4) $a\cdot e^{ax}>\ln x \xrightarrow{\text{同乘}x} a\cdot x\cdot e^{ax}>x\cdot\ln x$

(5) $a^x>\log_a x \Rightarrow xa^x>x\cdot\log_a x \Rightarrow x\cdot a^x>(\log_a x)\cdot a^{\log_a x}$

(6) $2x^3\cdot\ln x\ge m\cdot e^{\frac{m}{x}} \Rightarrow x^2\cdot\ln x^2\ge\frac{m}{x}\cdot e^{\frac{m}{x}} \Rightarrow (\ln x^2)\cdot e^{\ln x^2}\ge\frac{m}{x}\cdot e^{\frac{m}{x}}$

常见的基础互化：$\boxed{x=e^{\ln x}, \quad x=\ln e^x}$

① $x\cdot e^x=e^{x+\ln x}$, $\dfrac{e^x}{x}=e^{x-\ln x}$, $\dfrac{x}{e^x}=e^{\ln x-x}$

② $x\cdot\ln x=\ln x\cdot e^{\ln x}$, $x+\ln x=\ln xe^x$, $x-\ln x=\ln\dfrac{e^x}{x}$

⑩ 常用放缩：

① $e^x \geq x+1 > x > x-1 \geq \ln x \geq 1-\frac{1}{x}$

② $e^x \geq ex$, $\frac{1}{e}x \geq \ln x$

指对变形放缩：

① $e^x \geq x+1 \Rightarrow e^{x-1} \geq x \Rightarrow e^x \geq ex \Rightarrow e^x \geq \frac{e^2}{4}x^2$, $e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2}$

② $\ln x \leq x-1 \Rightarrow \ln ex \leq x \Rightarrow \ln x \leq \frac{x}{e}$

$\ln x \leq x-1 \Rightarrow \ln x \leq ex-2$

$\ln x \geq 1-\frac{1}{x} \Rightarrow x \cdot \ln x \geq x-1$

常见指对互化放缩：

① $xe^x = e^{x+\ln x} \geq x+\ln x+1$, $\frac{e^x}{x} = e^{x-\ln x} \geq x-\ln x$

$\frac{x}{e^x} = e^{\ln x - x} \geq \ln x - x + 1$

② $x^2 e^x = e^{x+2\ln x} \geq x+2\ln x+1$, $x^2 \cdot e^x = e^{x+2\ln x} \geq e \cdot (x+2\ln x)$

⑪ 恒成立问题：

若 $f(a)=0$，且 $f(x)$ 恒大于等于 0 在 $[a,+\infty)$ 上恒成立，则 $f(a)=0$ 的导数值 ≥ 0

1° $f(x) \geq 0$ 在 $[a,b]$ 上恒成立，若 $f(a)=0$，则 $f'(a) \geq 0$
若 $f(b)=0$，则 $f'(b) \leq 0$

2° $f(x) \leq 0$ 在 $[a,b]$ 上恒成立，若 $f(a)=0$，则 $f'(a) \leq 0$
若 $f(b)=0$，则 $f'(b) \geq 0$

结论只是必要性
不一定是充分条件.

可以等于0

恒成立例题：

$f(x)=\ln(1+x)$ ， $g(x)=x\cdot f'(x)$ ， $x\geq 0$ ， 若 $f(x)\geq a\,g(x)$ 恒成立 ，求 a 范围.

$f'(x)=\frac{1}{1+x}$ ， $g(x)=x\cdot f'(x)=\frac{x}{1+x}$ ∵ $\ln(1+x)\geq\frac{ax}{1+x}$ 恒成立

讨论必要性：

设：$F(x)=\ln(1+x)-\frac{ax}{1+x}\ (x\geq 0)$ 即让 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上 $F(x)\geq 0$ 即可.

由于：$F(0)=0$ ，那么让 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 恒↑即可.

$F'(x)=\frac{1+x-a}{(1+x)^2}$ $F'(0)=1-a\geq 0$ 即 $a\leq 1$

讨论充分性：

当 $a\leq 1$ 时， $F'(x)=\frac{1+x-a}{(1+x)^2}\geq\frac{x}{(1+x)^2}\geq 0$ ，

故 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ ↑ ， $F(x)\geq F(0)=0$ $a\in(-\infty,1]$

故当 $a\leq 1$ 时， $F(x)\geq 0$ 在 $[0,+\infty)$ 恒成立，即原命题成立.

---

max / min 问题：

① $\forall x\in I$ ， $f(x)\geq a$ $\Longrightarrow$ 则 $f(x)$ 的 min 一定要 $\geq a$

② $\forall x\in I$ ， $f(x)\geq g(x)$ $\Longrightarrow$ 构造 $F(x)=f(x)-g(x)$ ，让 $F(x)$ 的 min ≥ 0 即可

③ $\forall x_1\in I_1$ ， $\forall x_2\in I_2$ ， $f(x_1)\geq g(x_2)$ $\Longrightarrow$ $f(x_1)$ 的 min $\geq$ $g(x_2)$ 的 max

④ $\exists x\in I$ ， $f(x)\geq a$ $\Longrightarrow$ 则 $f(x)$ 的 max $\geq a$ 即可

⑤ $\exists x\in I$ ， $f(x)\geq g(x)$ $\Longrightarrow$ 构造 $F(x)=f(x)-g(x)$ ，让 $F(x)$ 的 max ≥ 0 即可.

⑥ $\forall x_1\in I_1$ ， $\exists x_2\in I_2$ ， $f(x_1)\geq g(x_2)$ $\Longrightarrow$ 让 $f(x_1)$ 的 min $\geq$ $g(x_2)$ 的 min

⑦ $\forall x_1\in I_1$ ， $\exists x_2\in I_2$ ， $f(x_1)=g(x_2)$ $\Longrightarrow$ $f(x)$ 值域小，包含中 $g(x)$ 值域中

⑧ $\exists x_1\in I_1$ ， $\exists x_2\in I_2$ ， $f(x_1)=g(x_2)$ $\Longrightarrow$ $f(x)$ 与 $g(x)$ 值域有交集.

⑨ $\forall x_1\in I_1$ ， $\forall x_2\in I_2$ ， $|f(x_1)-f(x_2)|\leq|g(x_1)-g(x_2)|$ $\Longrightarrow$

1° $f(x)$ ， $g(x)$ 都单调：

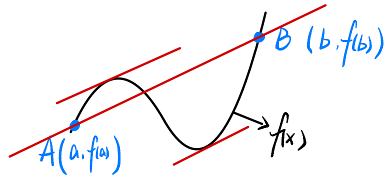
$x_1<x_2$ ， $f(x_2)-f(x_1)\leq g(x_2)-g(x_1)$ $\longrightarrow$ $f(x_2)-g(x_2)\leq f(x_1)-g(x_1)$

考得多 ← 2° 已知 $g(x)$ 的单调性，不知 $f(x)$ 单调性.

同上构造： $g(x_1)-g(x_2)\leq f(x_1)-f(x_2)\leq g(x_2)-g(x_1)$

拉格朗日中值定理：

若f(x)在区间[a,b]上连续，且f(x)在区间(a,b)内可导，则至少存在$\xi\in(a,b)$，使得 $\boxed{f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$



$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=k_{割线AB}$$ (割线斜率 = 切线斜率)

大T过程：构造函数 + 判断单调性.

题干型式： $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\begin{cases}>m\\<m\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}f'(\xi)\geq m\\ f'(\xi)\leq m\end{cases}$

eg: 若对于任意 $0<x_1<x_2<a$，都有 $\frac{x_2\ln x_1-x_1\ln x_2}{x_1-x_2}>1$，则a的max？

法一： $x_2\cdot\ln x_1-x_1\ln x_2<x_1-x_2$

$x_2\cdot(\ln x_1+1)<x_1(\ln x_2+1)$

$\frac{\ln x_1+1}{x_1}<\frac{\ln x_2+1}{x_2}$

令：$f(x)=\frac{\ln x+1}{x}$，$f(x_1)<f(x_2)$

$f'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}$　　$f'(x)=0$，得 $x=1$

故 $0<x<1$，$f'(x)>0$，$f(x)\uparrow$

$\therefore a_{max}=1$

法二：拉格朗日中值：

为了 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 这个型式，分子、分母同除 $x_1\cdot x_2$

有 $$\frac{\frac{\ln x_1}{x_1}-\frac{\ln x_2}{x_2}}{\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}}>1$$

令 $\frac{1}{x}=t$，$(t>\frac{1}{a})$

$$\frac{\frac{\ln\frac{1}{x_2}}{x_2}-\frac{\ln\frac{1}{x_1}}{x_1}}{\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}}=\frac{t_2\cdot\ln t_2-t_1\ln t_1}{t_2-t_1}<1$$

令 $f(t)=t\cdot\ln t$，$f'(t)=\ln t+1$

$$\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}=f'(t)\geq 1$$

$\ln t+1\geq 1$

$\ln t\geq 0$

$\ln\frac{1}{a}\geq 0$，$\frac{1}{a}\geq 1$

$a\leq 1$

泰勒展开式的应用：

可用于求极限，根的存在唯一性的证明，不等式的证明，判断函数的极值，函数凹凸性及拐点判断等方面.

$\boxed{定义1}$：对于一般函数 $f(x)$，设它在点 x_0 存在 n 阶导数，则 n 次多项式：

$$T_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

，这个即为函数 $f(x)$ 在 x_0 点处的泰勒展开式，其中 $R_{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$（其中 ξ 介于 x 与 x_0 间）叫作拉格朗日余项.

$\boxed{定义2}$：若函数 $f(x)$ 在点 x_0 存在 $n+1$ 阶导数，则有 $f(x)=T_n(x)+R_{n+1}$，即

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_{n+1}$$

这个即为函数 $f(x)$ 在 x_0 点处的泰勒展开式，其中 $R_{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$（其中 ξ 介于 x 与 x_0 间）叫作拉格朗日余项.

$\boxed{定义3}$：若函数 $f(x)$ 在 x_0 存在 n 阶导数，则有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

这个即为函数 $f(x)$ 在 x_0 点处的泰勒展开式，这里 $o((x-x_0)^n)$ 称为皮亚诺型余项.

以下是含有皮亚诺型余项的6个常用函数的泰勒展开式：

① $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$

② $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$

③ $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o(x^n)$

④ $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+o(x^{2m+1})$

⑤ $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$

⑥ $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$

若将 x 用 $-x$ 代替：$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)$

两边积分：$\ln(1+x)=\int_0^1[1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)]dx$

$=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1})$

结合上面6个泰勒展开式，可得如下常用不等式：

① $e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2}$ 对 $x\geq 0$ 恒成立

② $x-\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ 对 $x\geq 0$ 恒成立

③ $x-\frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ 对 $x\geq 0$ 恒成立

④ $1-\frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ 对 $x\geq 0$ 恒成立

⑤ $(1+x)^\alpha \leq 1+\alpha\cdot x$ $(0<\alpha<1)$ 对 $x\geq 0$ 恒成立

⑥ $1+x+x^2+\cdots+x^n < \frac{1}{1-x}$ 对 $0<x<1$ 恒成立

例：e^x 的泰勒展开式可得：

当 $0<x<1$ 时，$1+x<e^x=\sum_{i=0}^{\infty}x^i=\frac{1}{1-x}$，所以 $\ln(1+x)<x<\ln\frac{1}{1-x}$

在不等式 $x<\ln\frac{1}{1-x}$ 中，用 $\frac{x}{1+x}$ 替代 x 可得 $\frac{x}{1+x}<\ln\frac{1}{1-\frac{x}{1+x}}=\ln(1+x)$ 可得 $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$ $(0<x<1)$

也可强化 $\frac{x}{1+x}\leq\ln(1+x)\leq x$ $(x>-1)$

2014国Ⅰ,21T：已知 $f(x)=e^x\ln x+\frac{2e^{x-1}}{x}$，证 $f(x)>1$

$e^x\cdot\ln x+\frac{2e^{x-1}}{x}>1$ 等价于 $e^x\left(\ln x+\frac{2}{ex}\right)>1$ $(x>0)$

用 $x-1$ 去换 $e^x\geq x+1$ 中的 x，得 $e^x\geq ex$（当且仅当 $x=1$ 时等号成立）

用 $-\ln x$ 去换 $e^x\geq ex$ 中的 x，得 $\ln x\geq-\frac{1}{ex}$（当且仅当 $x=\frac{1}{e}$ 时等号成立）

故：$e^x\left(\ln x+\frac{2}{ex}\right)\geq e^x\cdot\left(\frac{1}{ex}\right)>1$

三角函数：公式 + 图像性质

齐次式：

$\ln x_1 - \ln x_2 > \frac{2x_1+x_2}{x_1-x_2}$

$\ln\frac{x_1}{x_2} > \frac{2\cdot\frac{x_1}{x_2}+1}{\frac{x_1}{x_2}-1}$

$\Downarrow$

$\ln x > \frac{2x+1}{x-1}$

① $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\Rightarrow$
- 齐次式：$\frac{\sin\alpha + 2\cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = 1$，$\tan\alpha = ?$
- 对偶式：$a\cdot\sin\alpha + b\cos\alpha =$ 常数，$\begin{cases}\cos\alpha = ?\\ \sin\alpha = ?\\ \tan\alpha = ?\end{cases}$

①弧长公式：$l = |\alpha|\cdot r$

②扇形面积公式：

$S = \frac{1}{2}l\cdot r = \frac{1}{2}|\alpha|\cdot r^2$

已知：$\sin\alpha + 2\cos\alpha = \frac{1}{3}$

设：$\cos\alpha - 2\sin\alpha = t$

平方相加

从而求解 $\sin x$，$\cos x$，$\tan x$…

$\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha + 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{9}$

$\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha - 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha = t^2$

相加 $1+4 = \frac{1}{9} + t^2$

可求 t，之后有了 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 一元一次方程求解即可。

② 诱导公式：
- 1. 直接考. $\sin(\frac{3}{2}\pi - \alpha) = -\cos\alpha$，$\sin(\alpha - \pi) = -\sin\alpha$
- 2. 间接考. $\boxed{\begin{cases}\frac{\pi}{6}\\ \frac{\pi}{3}\end{cases} \Big/ \begin{cases}\frac{\pi}{4}\\ \frac{\pi}{4}\end{cases}}$

	正弦	余弦
$\alpha + k\cdot 2\pi$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\pi + \alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
$-\alpha + k\cdot 2\pi$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\pi - \alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
$\frac{3}{2}\pi + \alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$
$\frac{3}{2}\pi - \alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$

1. 奇变偶不变，符号看象限.
2. 隐蔽的诱导公式：$y = \sin(x+\frac{\pi}{6}) + 2\cos(x-\frac{\pi}{3}) = \sin(x+\frac{\pi}{6}) + 2\cos(x+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2})$
   $= \sin(x+\frac{\pi}{6}) + 2\sin(x+\frac{\pi}{6})$
3. $y = \sin(\omega x + \varphi)$ $\begin{cases}奇：\varphi = k\pi, k\in Z\\ 偶：\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k\in Z\end{cases}$
4. 平移：$y = \sin 2x \xrightarrow{\sin(2x+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2})} y = -\cos(2x+\frac{\pi}{6})$

③ 和差公式：

$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta \pm \cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta \mp \sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\cdot\tan\beta}$

1. 直接考：$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

   $\tan 15^\circ = 2-\sqrt{3}$

2. 凑角：$\tan\alpha = \frac{1}{3}$，$\tan(\alpha-\beta) = \frac{1}{7}$，求 $\tan(2\alpha-\beta)$

   $= \tan[\alpha + (\alpha-\beta)]$

④ 二倍角公式：

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{1+2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1} = \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

⑤ 万能公式：

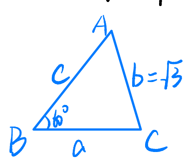
$$\sin\alpha = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

2018国Ⅲ：$f(x) = \frac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{2}\sin2\alpha$ ，$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

⑥ 辅助角公式：$f(x) = a\cdot\sin\omega x + b\cdot\cos\omega x = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(\omega x+\varphi)$ $\qquad \tan\varphi = \frac{b}{a}$

2011国 16T：在△ABC中，$B=60°$，$AC=\sqrt{3}$，求 $AB+2BC$ 的max？



$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$c = \frac{b}{\sin B}\cdot\sin C = 2\sin C$

$a = 2\sin A$

$C+2a$?

$= 2\sin C + 4\sin A$

$= 4\sin A + 2\sin[\pi-(A+\frac{\pi}{3})]$

$= 5\sin A + \sqrt{3}\cos A$

$= \boxed{2\sqrt{7}\cdot\sin(A+\varphi)}$

求值域？ $(\sqrt{3}, 2\sqrt{7}]$

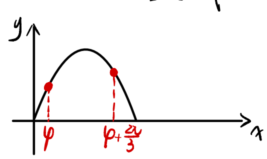
$C+2a$ 的max为 $2\sqrt{7}$

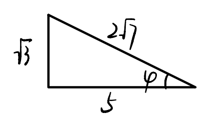
$\tan\varphi = \frac{\sqrt{3}}{5}$

估角：$\varphi < 30°$

$\because 0 < A < \frac{2\pi}{3}$

$\therefore \varphi < A+\varphi < \frac{2\pi}{3}+\varphi$





$2\sqrt{7}\cdot\sin\varphi = 2\sqrt{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \sqrt{3}$

$\boxed{\text{估角：}}$

若α，β均锐角，$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin(\alpha+\beta) = \frac{3}{5}$，则 $\cos\beta$ = ?

$\cos\beta = \cos[(\alpha+\beta)-\alpha]$

$= \cos(\alpha+\beta)\cdot\cos\alpha + \sin(\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha$

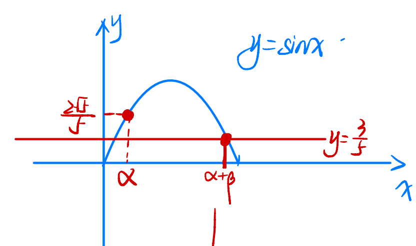
$= \frac{2\sqrt{5}}{25}$

$\begin{cases}\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1\end{cases}$ 得 $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\begin{cases}\sin(\alpha+\beta) = \frac{3}{5}\\ \sin^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta) = 1\end{cases}$

问 $\cos(\alpha+\beta)$ 是正 or 负？

$\cos(\alpha+\beta) = -\frac{4}{5}$



可推得 α+β 在第二象限.

⑦ 正切恒等式：$A+B+C = k\pi$，$k\in Z$

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$$

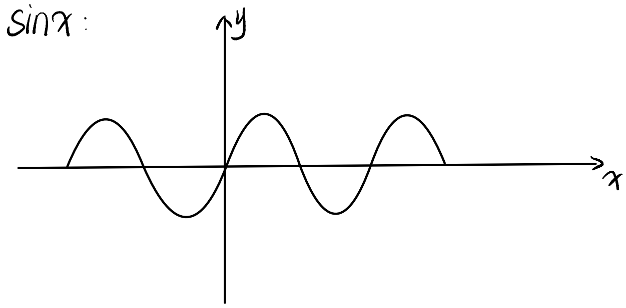
⑧ 半角公式：

$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ ，$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ ，$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

三角函数图像

$y=A\cdot\sin(\omega x+\varphi)$, $T=\frac{2\pi}{\omega}$, $f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$

$\sin x$:



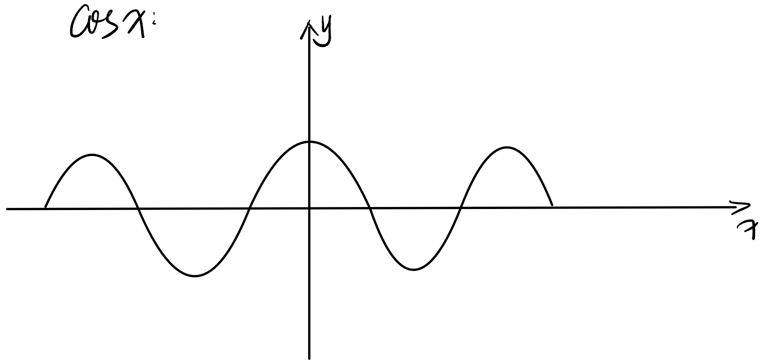
对称轴: $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$

对称中心: $(k\pi, 0)$, $(k\in Z)$

$\uparrow$: $[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi]$ $(k\in Z)$

$\downarrow$: $[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi]$ $(k\in Z)$

$\cos x$:



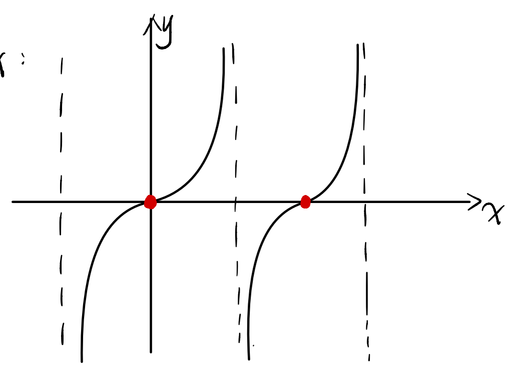
对称轴: $x=k\pi$ $(k\in Z)$

对称中心: $(k\pi+\frac{\pi}{2}, 0)$, $(k\in Z)$

$\uparrow$: $[-\pi+2k\pi, 2k\pi]$, $(k\in Z)$

$\downarrow$: $[2k\pi, \pi+2k\pi]$, $(k\in Z)$

$\tan x$:



对称中心: $(\frac{k\pi}{2}, 0)$

$y=A\cdot\tan(\omega x+\varphi)$. $T=\frac{\pi}{|\omega|}$

$\uparrow$: $(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2})$

① 平移伸缩:

在x上移动前要先把x前系数提出来.

$y=\sin 2x \xrightarrow{\text{右移}\frac{\pi}{6}\text{单位}} y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 　 $y=\sin[2(x-\frac{\pi}{6})]$

$y=\sin(2x+\frac{\pi}{6}) \xrightarrow{\text{伸长2倍}} y=\sin(x+\frac{\pi}{6})$

$\omega>1$, 横坐标缩短.

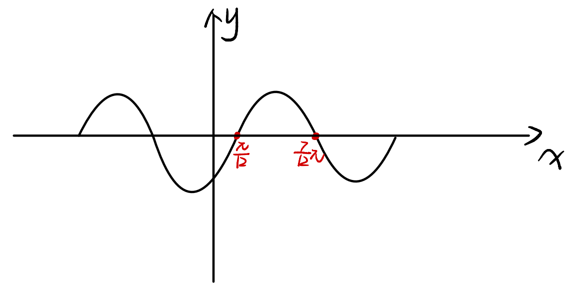
$0<\omega<1$, 横坐标伸长.

$y=\sin(2x) \xrightarrow{\text{左移}\frac{5}{12}\pi} y=\cos(2x+\frac{\pi}{3}) = \sin[(2x+\frac{\pi}{3})+\frac{\pi}{2}]$

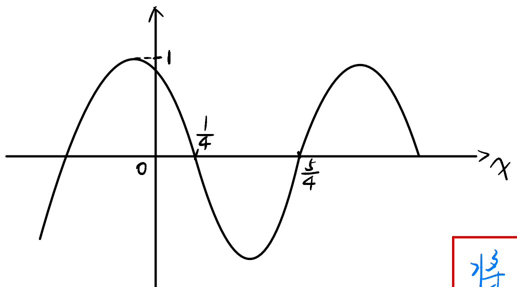
$= \sin(2x+\frac{5\pi}{6})$

$y=\sin 2x \xrightarrow{\text{右移}\frac{\pi}{12}} y=-\cos(2x+\frac{\pi}{3}) = \sin[(2x+\frac{\pi}{3})-\frac{\pi}{2}]$

② 画图像：$y=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$



③ 2015国Ⅰ：已知图像求解析式：



$y=A\cdot\cos(\omega x+\varphi)$ $A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$

$A=1$

$\frac{T}{2}=1 \Rightarrow T=2 \Rightarrow \omega=\pi$

故：$y=\cos(\pi x+\frac{\pi}{4})$

将$(\frac{1}{4},0)$代入得：$\cos(\frac{\pi}{4}+\varphi)=0$，$\frac{\pi}{4}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$\varphi=\frac{\pi}{4}$

带点求φ时要分增0和减0!!!

④考性质：$y=\sin(\omega x+\varphi)$
- 单调性
- 对称性 16国Ⅰ，12T
- 极值零点 19国Ⅲ，12T
- 值域
- 周期

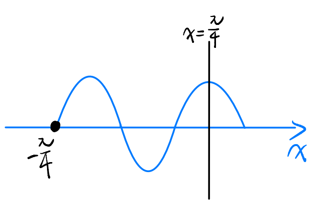
零点与对称轴不一定相临

2016国Ⅰ，12T：$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0，|\varphi|\le\frac{\pi}{2})$

$W_{max}=?$

$x=-\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 零点，$x=\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 对称轴，且 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{36})$ 单调

求 ω 的max？



零点 $x=-\frac{\pi}{4}$，与对称轴$x=\frac{\pi}{4}$之间差$\frac{\pi}{2}$个单位

同时也差奇数个$\frac{T}{4}$

故：$(2k+1)\cdot\frac{T}{4}=\frac{\pi}{2}$ 　解：$T=\frac{2\pi}{2k+1}$

又∵ $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{36})$ 上单调

∴ $\frac{5\pi}{36}-\frac{\pi}{18}\le\frac{T}{2}$

解：$T\ge\frac{\pi}{6}$，代入T求解：$k\le\frac{11}{2}=5.5$

∵ $T=\frac{2\pi}{\omega}$ 　故：$\omega=2k+1$

讨论：当$k=5$时，$\omega=11$，$\varphi=-\frac{\pi}{4}$

$f(x)=\sin(11x-\frac{\pi}{4})$ 　$x\in(\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{36})$

$\frac{13\pi}{36}<11x-\frac{\pi}{4}<\frac{23\pi}{18}$

不单调，舍.

当$k=4$时，$\omega=9$，$\varphi=\frac{\pi}{4}$

$f(x)=\sin(9x+\frac{\pi}{4})$，$x\in(\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{36})$

$\frac{3}{4}\pi<9x+\frac{\pi}{4}<\frac{3}{2}\pi$

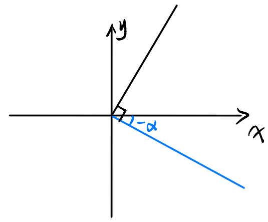
符合题意. $W_{max}=9$

诱导公式解析：奇变偶不变，符号看象限。

$\sin\alpha$ +	$\sin\alpha$ +
$\cos\alpha$ −	$\cos\alpha$ +
$\tan\alpha$ −	$\tan\alpha$ +
$\sin\alpha$ −	$\sin\alpha$ −
$\cos\alpha$ −	$\cos\alpha$ +
$\tan\alpha$ +	$\tan\alpha$ −

$\boxed{\text{永远将}\alpha\text{当成一个锐角}}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

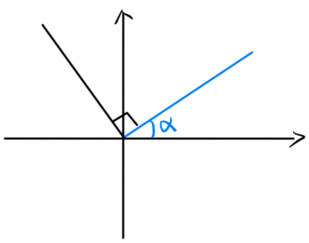


$-\alpha$ 在第四象限，$-\alpha+\frac{\pi}{2}$ 在第一象限。

看第一象限的 sin 值是 + 的

那么 sin ⟶ cos 后，cos 值为 +。

$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$

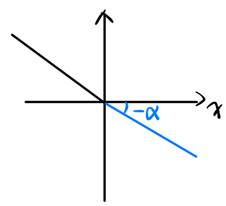


$\alpha+\frac{\pi}{2}$ 在第二象限。

cos 在第二象限为负

故：cos ⟶ sin 后，sin 的值为负

$\tan(\pi-\alpha)$



$\pi-\alpha$ 在第二象限。

tan 的值为负

$\alpha + k\cdot\frac{\pi}{2}$，k为奇数 $\begin{cases}\sin\alpha \longrightarrow \cos\alpha \\ \cos\alpha \longrightarrow \sin\alpha\end{cases}$

k为偶数，不变 $\begin{cases}\sin\alpha \longrightarrow \sin\alpha \\ \cos\alpha \longrightarrow \cos\alpha\end{cases}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ 奇 $\longrightarrow$ $\cos\alpha$

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$ 奇 $\longrightarrow$ $-\sin\alpha$

$\sin(\pi+\alpha)$ 偶 $\longrightarrow$ $-\sin\alpha$

$\cos(\pi-\alpha)$ 偶 $\longrightarrow$ $-\cos\alpha$

常见的一定要背：

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$	$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$
$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$	$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$
$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$	$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$
	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$	$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$

无论怎么变

变后角只有α，

没有−α

例：$y=\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$ 怎么平移得到 $y=\sin(-3x)$？

$\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$\Downarrow$

$\sin\left(-3x+\frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{\text{左移}\frac{\pi}{12}\text{个单位}} y=\sin(-3x)$

$\sin\left[-3(x+\varphi)+\frac{\pi}{4}\right] \xrightarrow{?} y=\sin(-3x)$

$-3x-3\varphi+\frac{\pi}{4}$

$-3\varphi+\frac{\pi}{4}=0$

解：$\varphi=\frac{\pi}{12}$

考试时一定要注意!!!

$\frac{\pi}{2}-\alpha$ 与 $\alpha-\frac{\pi}{2}$ 不一样

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$

$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\alpha$

例：$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)$

$=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

解三角形:

$$\boxed{\frac{b}{a}=\frac{d}{c}=\frac{b+d}{a+c}=\frac{b-d}{a-c}}$$

海伦公式:

$p=\frac{a+b+c}{2}$

$S=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$

三角形外接圆半径.

1. 正弦Th: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R=\frac{a+b}{\sin A+\sin B}=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$

① 已知 a、A、B，求 b？

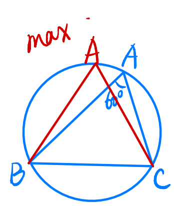
② $A=2B$，$\sin A=\sin 2B=2\sin B\cdot\cos B \Rightarrow a=2b\cdot\cos B$

③ 边角混用: 射影Th: $\begin{cases} a=b\cos C+c\cdot\cos B \\ b=c\cdot\cos A+a\cdot\cos C \\ c=a\cdot\cos B+b\cdot\cos A \end{cases}$

$\sin A\cdot\cos B+\sin B\cdot\cos A$
$=\sin(A+B)$
$=\sin(\pi-C)$
$=\sin C$

$\sin A+\sin B=x\cdot\sin C \Rightarrow a+b=xc$

④ $A=\frac{\pi}{3}$，$a=\sqrt{3}$，求 S 范围？
求周长范围？



考大T: 余弦Th + 均值不等式 (一定要写当且仅当 $a=b$ 时取等)
考小T: 用圆

$A=60°$ 固定角
⇓
点A在圆上动，B.C两点不动，故: $S\in\left(0,\frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$

考大T: ① $S=\frac{1}{2}bc\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}bc$

$\cos A=\frac{b^2+c^2-3}{2bc}=\frac{1}{2}$

$bc=b^2+c^2-3\geq 2bc-3$

$0<bc\leq 3$

$0<S\leq\frac{3\sqrt{3}}{4}$

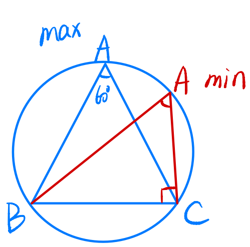
② $(b+c)^2-3=3bc\leq\frac{3}{4}(b+c)^2$

$\frac{1}{4}(b+c)^2\leq 3$

$\sqrt{3}<b+c\leq 2\sqrt{3}$

两边之和大于第三边.

④' $A=\frac{\pi}{3}$，$a=\sqrt{3}$，$\triangle ABC$ 为锐角三角形，周长范围.



考大T: 用正弦Th

$\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2$

$b+c=2\sin B+2\sin C$
$=2\sin B+2\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)$
$=3\sin B+\sqrt{3}\cos B$
$=\sqrt{12}\cdot\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$

$\because A=\frac{\pi}{3}$

$\therefore \frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$

……

小技巧:
$\sin A=\sin(B+C)$

2. 余弦Th:

$$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A \\ b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{(b+c)^2-2bc-a^2}{2bc} \\ \cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \quad \vdots \\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \quad \vdots \end{cases}$$

① 已知三边，求任意的一个角 / 已知二边一角，求第三边.

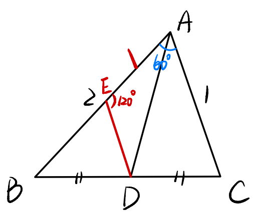
② $b+c$，bc 考余弦Th

③ 边角混用，角较少且是余弦.（用余弦Th化成边）

---

3. 考中线:

①

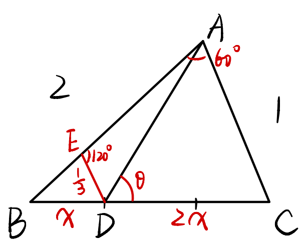


法1：向量：$\vec{AD}=\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AC})$ 平方.

$$\vec{AD}^2=\frac{1}{4}(\vec{AB}^2+\vec{AC}^2+2\vec{AB}\cdot\vec{AC})$$

法2：作中点E，中位线作辅助线

在△ADE中，一步余弦Th就可求.



三等分点

法1：$\vec{AD}=\frac{2}{3}\vec{AB}+\frac{1}{3}\vec{AC}$（三点共线，$\lambda+\mu=1$）

法2：作三等分点，在△ADE中，也都可求

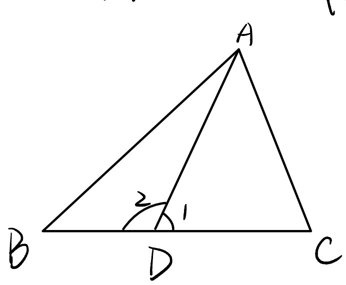
法3：设 $BD=x$，$DC=2x$

在△ABD中，$\cos(\pi-\theta)=\dfrac{x^2+AD^2-4}{2\cdot x\cdot AD}$

在△ACD中，$\cos\theta=\dfrac{AD^2+4x^2-1}{2AD\cdot 2x}$

相加等于0

② 公共边AD：（点D位置任意）

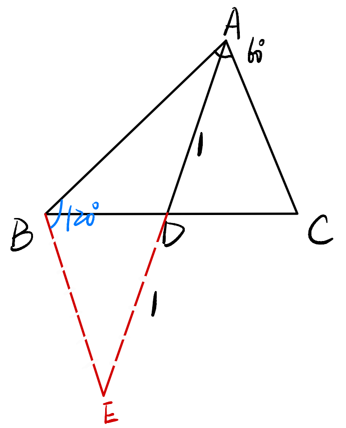


$$\boxed{\begin{aligned}\sin\angle 1 &= \sin\angle 2 \\ \cos\angle 1 &= -\cos\angle 2\end{aligned}}$$

在△ABD中，$\sin B=\dfrac{AD\cdot\sin\angle 2}{AB}$

…… 都可求了.

③ 等倍法：（注意D点位置）



作 BE // AC，延长 AD，交 BE 于点 E，可得 $S_{\triangle ADC} \cong S_{\triangle BDE}$

已知：AD = 1，A = 60°，D点为BC中点，求 $S_{\triangle ABC}$ 的 max？

$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BE \cdot \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot AB \cdot BE$

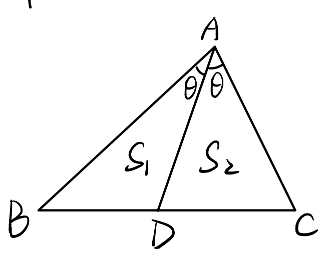
在△ABE中，$\cos 120° = \frac{AB^2+BE^2-4}{2AB \cdot BE} = -\frac{1}{2}$

$AB \cdot BE = 4-(AB^2+BE^2) \leq 4-2AB \cdot BE$　　$AB^2+BE^2 \geq 2AB \cdot BE$

$3AB \cdot BE \leq 4$

---

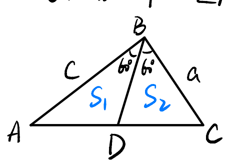
4. 角平分线：



$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AD \cdot \sin\theta}{\frac{1}{2} \cdot AD \cdot AC \cdot \sin\theta} = \frac{BD}{DC}$$

2018江苏.13T：∠ABC = 120°，∠ABC平分线交AC于点D，且BD=1，则 4a+c 的 min？



$S_{\triangle ABC} = S_1 + S_2$

$\frac{1}{2}ac \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$ac = c + a$

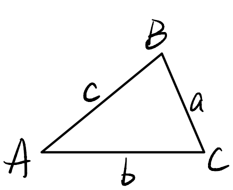
$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = 1$

$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right) \cdot (4a+c)$

$= 4 + \frac{4a}{c} + \frac{c}{a} + 1 = 5 + \frac{4a}{c} + \frac{c}{a} \geq 4+5 = 9$

---

5. 求解有几个三角形：已知两边一对角.



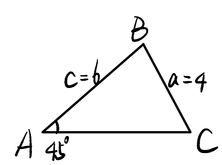
① 知大求小 —— 1个

② 知小求大
- $\sin C > 1$，无解.
- $\sin C = 1$，1个
- $\sin C < 1$，2个

① 知小求大

$a < c$，$A = 45°$

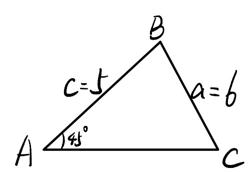
求 $\sin C$



② 知大求小：

$a > c$，$A = 45°$

就只有1个解

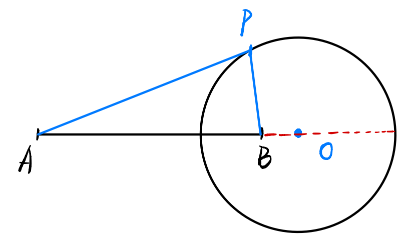


6. 阿波罗尼斯圆：

在平面上给定两点 A, B，设 P 点在同一平面上，且满足 $\frac{PA}{PB}=\lambda$

当 $\lambda>0$，且 $\lambda\neq1$ 时，P 点的轨迹是个圆。

$\lambda=1$ 时，P 点轨迹是线段 AB 的中垂线。

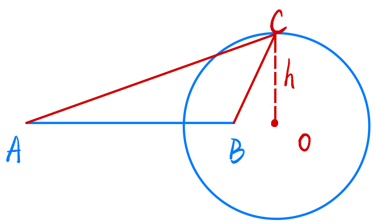


1° 当 $\lambda>1$ 时，点 B 在圆 O 内，点 A 在圆 O 外

当 $0<\lambda<1$ 时，点 A 在圆 O 内，点 B 在圆 O 外

2° 阿波罗尼斯圆的直径 $d=\frac{2a\lambda}{|\lambda^2-1|}$，$S=\pi\cdot\left(\frac{a\lambda}{\lambda^2-1}\right)^2$ [设：AB 长为 a]

例：AB = 4，AC = 2BC，求 △ABC 面积的 max？



$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot h$

求 h 的 max 即可!!

那么 h 什么时候 max 呢？

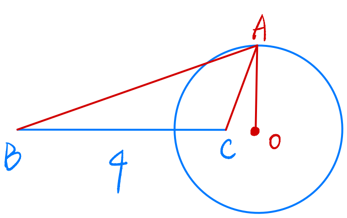
$\frac{AC}{BC}=2=\lambda$

当 $h=r$ 时，

故：$h=r=\frac{a\cdot\lambda}{|\lambda^2-1|}=\frac{4\times2}{|2^2-1|}=\frac{8}{3}$

$S_{\triangle ABC}$ 的 max $=\frac{1}{2}\times4\times\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$

例：BC = 4，$\sin C=2\sin B$，当 $S_{\triangle ABC}$ max 时，BC 边上的高？



$c=2b$

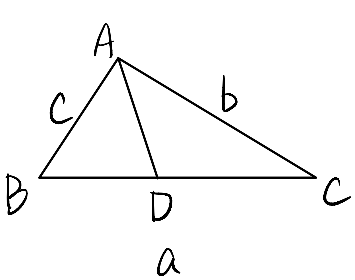
$\frac{c}{b}=\frac{AB}{AC}=2=\lambda$

$h=r=\frac{a\cdot\lambda}{|\lambda^2-1|}=\frac{4\times2}{|2^2-1|}=\frac{8}{3}$

---

7. 张角定理：

在 △ABC 中，D 是 BC 上一点，连结 AD，则 $\frac{\sin\angle BAD}{AC}+\frac{\sin\angle CAD}{AB}=\frac{\sin\angle BAC}{AD}$



Th 的推论：

在 Th 的条件下，$\angle BAD=\angle CAD$

即：AD 平分 $\angle BAC$，则有 $2\cdot\frac{\cos\angle BAD}{AD}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$

数列：$\begin{cases}\text{等差}\\ \text{等比}\\ \text{求}a_n\\ \text{求}S_n\\ \text{放缩，数学归纳法.}\end{cases}$

特殊值法：当数列选填只有1个条件时，2个及2个以上不可以用，同时注意 $d\neq0$ / $q\neq1$ 不可以用.

eg：$a_9=\frac{1}{2}a_{12}+6$，求 S_{11}？

将 a_n 当成常数列. $x=\frac{1}{2}x+6$，$x=12$　$S_{11}=11\times12=132$

等差：

① $\begin{cases}a_n=a_1+(n-1)d\\ a_n=a_m+(n-m)d\end{cases}$ $\Rightarrow$ $a_n=dn+(a_1-d)$，$a_n=pn+q$（一次函数）　$\begin{cases}d>0, & \uparrow\\ d=0, & \text{常数列}\\ d<0, & \downarrow\end{cases}$

② $m+n+p=r+s+t \Rightarrow a_m+a_n+a_p=a_r+a_s+a_t$

等差中项：$a_{m-1}+a_{m+1}=2a_m$

③ $S_n=\frac{n\cdot(a_1+a_n)}{2}=n\cdot a_1+\frac{n\cdot(n-1)}{2}d$

$S_{2n-1}=\frac{(2n-1)\cdot(a_1+a_{2n-1})}{2}=(2n-1)\cdot a_n$ / $S_n=n\cdot a_{\frac{n+1}{2}}$

$S_n=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$　此时为无常数项的二次函数.

$a_n=\begin{cases}S_1, & n=1\\ S_n-S_{n-1}, & n\geq2\end{cases}$

若大T：$S_n=n^2+3n$，求 a_n？

$S_n-S_{n-1}=a_n=2n+2$　$(n\geq2)$

又：$a_1=4$，　$a_n=2n+2$

若分段函数：$S_n=n^2+3n+1$，求 a_n？

$S_1=a_1=5$，

$S_2=11=a_1+a_2$，

$a_2=6$

故：$a_n=\begin{cases}5, & n=1\\ 2n+4, & n\geq2\end{cases}$

④ a_n，b_n 都等差数列. 前 n 项和分别为 S_n，T_n.

故：$\frac{a_n}{b_n}=\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}$

⑤ $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为公差 $\frac{d}{2}$ 的等差数列，看到题中有很多 S_n 时，往构造 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 上靠.

2013国I.7T：等差数列 $\{a_n\}$，$S_{m-1}=-2$，$S_m=0$，$S_{m+1}=3$，求 m？

构造：$\frac{S_{m-1}}{m-1}$，$\frac{S_m}{m}$，$\frac{S_{m+1}}{m+1}$

$\frac{d}{2}$　$\frac{d}{2}$

故：$2\cdot\frac{S_m}{m}=\frac{S_{m-1}}{m-1}+\frac{S_{m+1}}{m+1}$

可得：$m=5$

若已知 S_{m-1}，S_m，S_{m+2}，求 m？

$\frac{S_{m-1}}{m-1}$，$\frac{S_m}{m}$，$\frac{S_{m+2}}{m+2}$

$\frac{d}{2}$　d

$\frac{S_{m+2}}{m+2}-\frac{S_m}{m}=2\times\left(\frac{S_m}{m}-\frac{S_{m-1}}{m-1}\right)$

2015国II.16T：$a_1=-1$，$a_{n+1}=S_n\cdot S_{n+1}$，求 S_n？

$S_n\cdot S_{n+1}=a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$

故：$1=\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}$

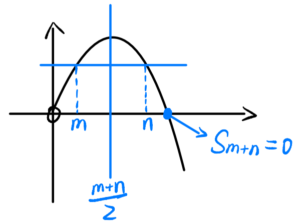
即：$\frac{1}{S_{n+1}}-\frac{1}{S_n}=-1$

故：$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 等差数列. $d=-1$

$\frac{1}{S_n}=-n$，得：$S_n=-\frac{1}{n}$

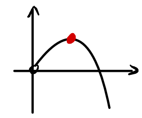
⑥ S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$ …… 成等差，公差为 n^2d

⑦ $S_n=S_m \Longrightarrow S_{m+n}=0$

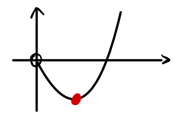


⑧ S_n 的 max / min ？

1° a_n 等差，$a_1>0$，$d<0$，a_n 是 ↓，则 S_n 存在 max：

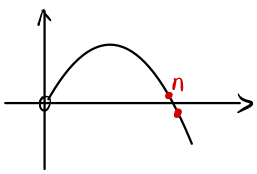


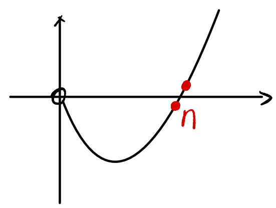
2° a_n 等差，$a_1<0$，$d>0$，a_n 是 ↑，则 S_n 存在 min：



⑨ $S_n>0$，求 n 的值？ / $S_n<0$，求 n 的值？

$\boxed{\text{注意，n是整数！！}}$





等比：

① $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$ / $a_n=a_m\cdot q^{n-m}$

② $a_n=a_1\cdot q^{n-1} \Longrightarrow a_n=A\cdot B^{\underline{cn+d}}$ (必须为一次函数) $q=B^c$

$\begin{cases} a_n=2^{2n+1} \longrightarrow q=2^2 \\ a_n=2^{1-2n} \longrightarrow q=2^{-2} \end{cases}$

③ 单调性：$\begin{cases} a_1>0 & \begin{cases} q>1, & \uparrow \\ 0<q<1, & \downarrow \\ q<0, & \text{摆动 } + - + - + - \end{cases} \\ a_1<0 & \begin{cases} q>1, & \downarrow \\ 0<q<1, & \uparrow \\ q<0, & - + - + - + \end{cases} \end{cases}$

④ $m+n+p=r+s+t \Rightarrow a_m\cdot a_n\cdot a_p=a_r\cdot a_s\cdot a_t$，等比中项：$a_{m-1}\cdot a_{m+1}=a_m^2$

⑤ $S_n=\dfrac{a_1\cdot(1-q^n)}{1-q}=\boxed{\dfrac{a_1-a_n\cdot q}{1-q}}$ 不知道有多少项时用.

$=\dfrac{a_1-a_1\cdot q^n}{1-q}=\dfrac{a_1}{1-q}-\dfrac{a_1}{1-q}\cdot q^n \longrightarrow \{a_n\}$ 等比 $q\neq1$，$S_n=Aq^n-A$

$\begin{cases} ① \ S_n=2^{n+1}-2=2\cdot2^n-2 \\ \quad a_n=2\cdot2^{n-1}=2^n \\ ② \ S_n=2^{n+1}-1 \\ \quad a_n=\begin{cases} 3, & n=1 \\ 4\cdot2^{n-2}, & n\geq2 \end{cases} \end{cases}$

⑥ S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，… 成等比，公比 q^n

求通项：

① $a_{n+1}-a_n=f(n)$ 累加法

$$\begin{cases} a_2-a_1=f(1)\\ a_3-a_2=f(2)\\ \vdots \\ a_{n+1}-a_n=f(n)\end{cases}$$

累加后 $a_{n+1}-a_1=\sum_{k=1}^{n} f(k)$

② $\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$ 累乘：

$$\begin{cases} \frac{a_2}{a_1}=f(1)\\ \frac{a_3}{a_2}=f(2)\\ \vdots \\ \frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)\end{cases}$$

累乘：$\frac{a_{n+1}}{a_1}=\prod_{k=1}^{n} f(k)$

③ $a_{n+1}+a_n=$ 一次函数（隔相等差）

$a_{n+1}\cdot a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$（隔相等比）

eg：$a_{n+1}+a_n=2n+3$，$a_1=1$，求 a_n？

$a_{n+2}+a_{n+1}=2n+5$

相减：$a_{n+2}-a_n=2$

$a_1, a_3, a_5, a_7\cdots$ $d=2$

$$\begin{cases} ① n为奇：a_n=a_1+\frac{n-1}{2}d=n \\ ② n为偶：a_n=2n+3-a_{n+1}=n+2 \end{cases}$$

④ 2016山东：$b_n+b_{n+1}=6n+5$，$\{b_n\}$等差，求 $b_n=$？

都已知等差，代数即可。

$b_1+b_2=11$

$b_2+b_3=17$ 减 $2d=6$，$d=3$，$b_1=4$，$b_n=3n+1$

⑤ a_n 与 S_n 的关系式：$a_n=\begin{cases}S_1, & n=1\\ S_n-S_{n-1}, & n\geq 2\end{cases}$ / 前n项积 T_n，$a_n=\begin{cases}T_1, & n=1\\ \frac{T_n}{T_{n-1}}, & n\geq 2\end{cases}$

$$\begin{cases} S_n=2a_n+1，a_1=1，\{a_n\}一定等比 \\ S_n=a_n^2+2a_n，\{a_n\}等差 \end{cases}$$

几个常见的：1° 已知 $S_n=n^2$ / $a_1+a_2+a_3+\cdots a_n=n^2$，直接用 $a_n=\begin{cases}S_1, & n=1\\ S_n-S_{n-1}, & n\geq 2\end{cases}$

2° $a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n}=n^2$，先构造 $\frac{a_n}{n}=b_n$，$\{b_n\}$的前n项和为 S_n，故 $S_n=n^2$

3° $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2=n^2$，同上构造 $a_n^2=b_n$

⑥ $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=2^n$

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)\cdot a_{n-1}=2^{n-1}$ 减 $\Rightarrow$ $n\cdot a_n=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$

$a_n=\frac{2^{n-1}}{n}$ $(n\geq 2)$

验证：当 $n=1$ 时，$a_1=2$

当 $n=1$ 时，$a_1=\frac{2^{1-1}}{1}=1$

故：$a_n=\begin{cases}2, & n=1\\ \frac{2^{n-1}}{n}, & n\geq 2\end{cases}$

⑦ 照着题干所给凑出想要的式子 [给一个新数列让证明是等差 or 等比]

$a_{n+1}=2a_n-n$，证 $\{a_n-n-1\}$ 为等比？

凑这个型式.

$a_{n+1}-(n+1)-1=2a_n-n-n-2=2(a_n-n-1)$

$a_{n+1}=2a_n+1$，证：$\{a_n+1\}$ 为等比

$a_{n+1}+1=2a_n+1+1=2(a_n+1)$

$a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$，证 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 等比？

答案

$a_{n+2}-a_{n+1}=2a_{n+1}-2a_n$

⑧ 构造数列：

1° $a_{n+1}=pa_n+q$（其中 p、q 为常数，$p\neq1$）$\Rightarrow a_{n+1}+t=p(a_n+t)$，$t=\frac{q}{p-1}$

2° $a_{n+1}=\frac{c\cdot a_n}{Aa_n+B}$，取倒数

3° $a_{n+1}=p\cdot a_n+q^n$，两侧同除 q^{n+1}，$\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}}=\frac{p}{q}\cdot\frac{a_n}{q^n}+\frac{1}{q}$，之后构造1°函数.

4° $a_{n+2}=p\cdot a_{n+1}+qa_n \Rightarrow a_{n+2}-S\cdot a_{n+1}=t\cdot(a_{n+1}-Sa_n)$，$\begin{cases}S+t=p\\ St=-q\end{cases}$

5° $a_{n+1}=Aa_n+B\cdot n+C \Rightarrow a_{n+1}+p(n+1)+q=A(a_n+pn+q)$

6° $a_{n+1}=p\cdot a_n^r$ $(p>0,\ a_n>0)$ 取对 $\Rightarrow a_{n+1}=pa_n+q$ 之后构造1°函数.

7° $a_{n+1}=\frac{Ca_n+D}{A\cdot a_n+B}$，$x=\frac{Cx+D}{Ax+B}$

$\begin{cases}① \Delta<0 & \text{周期}\\ ② \Delta>0, & \left\{\frac{a_n-x_1}{a_n-x_2}\right\}\text{等比}\\ ③ \Delta=0 & \left\{\frac{1}{a_n-x_0}\right\}\text{等差}.\end{cases}$

8° $a_n+a_{n+1}=f(n)=An+B \Rightarrow a_n=\begin{cases}a_1+A(\frac{n+1}{2}-1), & n\text{为奇}.\\ a_2+A(\frac{n}{2}-1), & n\text{为偶}.\end{cases}$

9° $a_n\cdot a_{n+1}=f(n)=q^n \Rightarrow a_n=\begin{cases}a_1\cdot q^{(\frac{n+1}{2}-1)}, & n\text{为奇}.\\ a_2\cdot q^{(\frac{n}{2}-1)}, & n\text{为偶}\end{cases}$

求和：
① 分组求和：(等差＋等比)
② 错位相减（大招）
③ 裂项相消 ☆☆
④ 讨论奇偶.
⑤ 绝对值求和.
⑥ 倒序相加

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)\cdot(2n+1)$$

① 错位相减大招：等差×等比

$$a_n=(kn+m)\cdot q^{n-1},\quad S_n=(An+B)\cdot q^n-B\quad \left(A=\frac{k}{q-1},\quad B=\frac{m-A}{q-1}=\frac{m}{q-1}-\frac{k}{(q-1)^2}\right)$$

$$a_n=(kn+m)\cdot q^n,\quad S_n=\left[\frac{k\cdot n}{q-1}+\frac{m}{q-1}-\frac{k}{(q-1)^2}\right]q^{n+1}-\left[\frac{m}{q-1}-\frac{k}{(q-1)^2}\right]q$$

② 裂项相消：

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$a_n=\frac{2^n}{(2^n+1)\cdot(2^{n+1}+1)}=2^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}\right)$$

$$a_n=\frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

了解放缩：为了方便求和，将不可裂项 ⟶ 可裂项即可.

① $\frac{1}{n^2}$

eg：$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2\,/\,\frac{7}{4}\,/\,\frac{5}{3}$

1° $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{(n+1)(n-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$

2° $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}=\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}=2\cdot\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

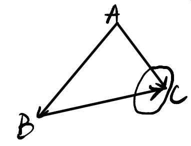
② $\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{2}{2\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$

③ $\frac{2}{3^n-1}<\frac{3}{3^n}=\frac{1}{3^{n-1}}$ 糖水不等式

④ $\frac{1}{n(2n+1)}=\frac{2}{2n(2n+1)}<\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$

向量：三角形法则，平四边形法则，基底

三角形法则中的减法



$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

记作：求$\overrightarrow{BC}$找箭头和$\overrightarrow{BC}$两头对着的是$\overrightarrow{AC}$
故$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

1、平面向量共线定理：

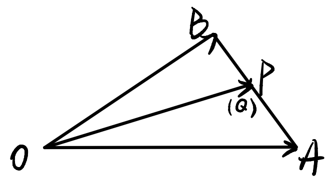
已知$\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OC}$，若$\lambda+\mu=1$，则A，B，C三点共线；反之亦然

已知A，B，C三点共线，则$\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OC}$中的$\lambda+\mu=1$

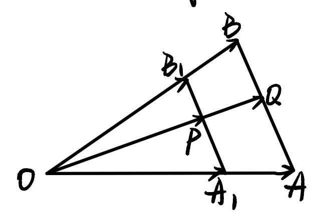
2、等和线：

平面内一组基底$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$及任一向量$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，$(\lambda,\mu\in R)$，若点P在直线AB上或在平行于AB的直线上，则$\lambda+\mu=k$（定值），反之也成立。$k=\dfrac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OQ}|}=\dfrac{|\overrightarrow{OA_1}|}{|\overrightarrow{OA}|}=\dfrac{|\overrightarrow{OB_1}|}{|\overrightarrow{OB}|}$

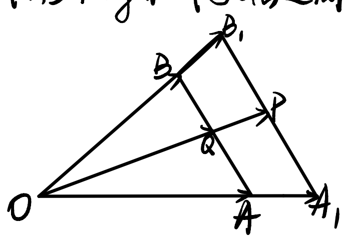
(1) 当等和线恰为直线AB时，$k=1$



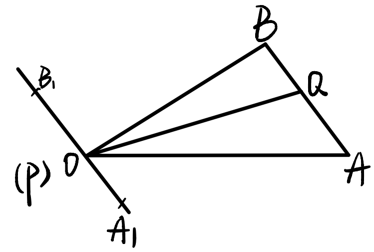
(2) 当等和线在O点和直线AB之间时，$0<k<1$



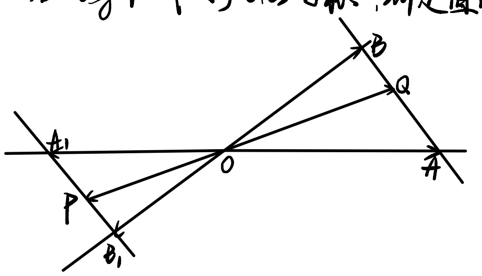
(3) 当直线AB在等和线与O点之间时，$k>1$



(4) 当等和线过O点时，$k=0$



(5) 若两等和线关于O点对称，则定值k互为相反数



3、平面向量的坐标运算：

$\vec{a}=(x_1,y_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2)$，λ为实数

$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$

$\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2,\ y_1-y_2)$　　$\lambda\cdot\vec{a}=(\lambda x_1,\ \lambda y_1)$

$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

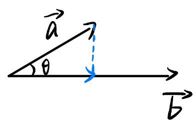
$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a}=\lambda\vec{b} \Rightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$

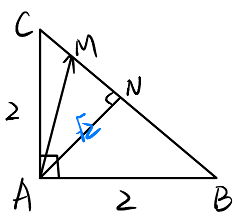
$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Rightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$

数量积：
① $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$
② 基底：$\vec{c}\cdot\vec{d}=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=?$ 用$\vec{c},\vec{d}$表示出$\vec{a},\vec{b}$.
③ 坐标：建系（出现等边，等腰，直角三角形，直角梯形，$60°$，$30°$…）
④ 投影；
⑤ 极化恒等式.

投影：



$\vec{a},\vec{b}$中一个模已知，另一个模未知，用投影



点N中点，求$\vec{AM}\cdot\vec{AN}=?$

点M在BC上动.

$\vec{AM}\cdot\vec{AN}=|\vec{AM}|\cdot|\vec{AN}|\cdot\cos\theta$

$=|\vec{AN}|\cdot|\vec{AN}|=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$

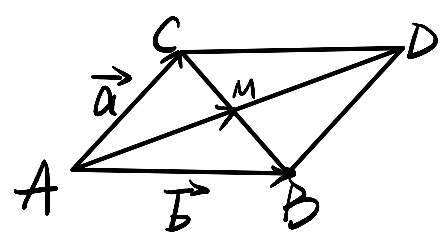
极化恒等式：

设$\vec{a},\vec{b}$为两个平面向量，则恒有等式 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}[(\vec{a}+\vec{b})^2-(\vec{a}-\vec{b})^2]$

在三角形中，也可以用三角形的中线来表示 $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=\vec{AM}^2-\vec{MB}^2$

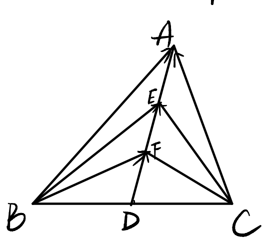
$=\vec{AM}^2-\frac{1}{4}\vec{CB}^2$

$\vec{AM}\cdot\vec{CB}=\frac{1}{2}(|\vec{AB}|^2-|\vec{AC}|^2)$



当两个向量之和 or 向量之差为定值的时候，常常可以考虑利用极化恒等式来转化求解.

例1：在△ABC中，D点是BC中点，E，F是AD上的两个三等分点，$\vec{BA}\cdot\vec{CA}=4$，$\vec{BF}\cdot\vec{CF}=-1$，则$\vec{BE}\cdot\vec{CE}=?$



∵ $\vec{BA}\cdot\vec{CA}=4 \Rightarrow \vec{AB}\cdot\vec{AC}=4=\vec{AD}^2-\vec{DB}^2$

$\vec{BF}\cdot\vec{CF}=-1 \Rightarrow \vec{FD}^2-\vec{DB}^2=-1$

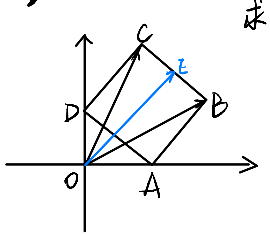
可得：$\vec{AD}^2=\frac{45}{8}$

$\vec{DB}^2=\frac{45}{8}-4$

$\vec{BE}\cdot\vec{CE}=\vec{ED}^2-\vec{DB}^2$

∴ $\vec{BE}\cdot\vec{CE}=\frac{7}{8}$

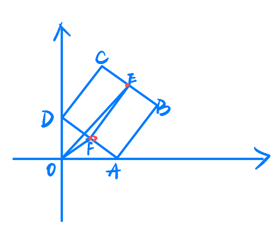
例2：如图边长为1的正方形ABCD的顶点A，D分别在x，y轴正半轴(含原点)上运动，求$\vec{OC}\cdot\vec{OB}$的max值.



$\vec{OC}\cdot\vec{OB}=\vec{OE}^2-\vec{EB}^2$

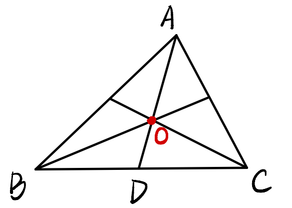
$|\vec{OE}|\le|\vec{OF}|+|\vec{FE}|=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

∴ $\frac{9}{4}-\frac{1}{4}=2$



四心：

① 重心：三角形三条中线的交点。



$\frac{AO}{OD}=\frac{2}{1}$ 三等分点。

$\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{0}$

$O\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\ \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$

$\boxed{\text{奔驰定理}}$：若O为△ABC内任意一点，有 $\alpha\vec{OA}+\beta\vec{OB}+\gamma\vec{OC}=\vec{0}$

则 $S_{\triangle BOC}:S_{\triangle AOC}:S_{\triangle AOB}=\alpha:\beta:\gamma$

$S_{\triangle BOC}\cdot\vec{OA}+S_{\triangle AOC}\cdot\vec{OB}+S_{\triangle AOB}\cdot\vec{OC}=\vec{0}$

---

② 内心：三角形三条角平分线交点。/ 内切圆的圆心。

$S_{\triangle BOC}:S_{\triangle AOC}:S_{\triangle AOB}=a:b:c \Rightarrow a\cdot\vec{OA}+b\cdot\vec{OB}+c\cdot\vec{OC}=\vec{0}$

$\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}+\frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|}$ 意思是为角平分线。

---

③ 外心：三角形三条中垂线交点 / 三角形外接圆的圆心。

$S_{\triangle BOC}:S_{\triangle AOC}:S_{\triangle AOB}=\sin2A:\sin2B:\sin2C$

$\Rightarrow \sin2A\cdot\vec{OA}+\sin2B\cdot\vec{OB}+\sin2C\cdot\vec{OC}=\vec{0}$

$(\vec{AB}+\vec{AC})\cdot\vec{BC}=\vec{0}$ 中垂线的意思。

---

④ 垂心：三角形三边上的高交点。

$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=\vec{OB}\cdot\vec{OC}=\vec{OC}\cdot\vec{OA}$

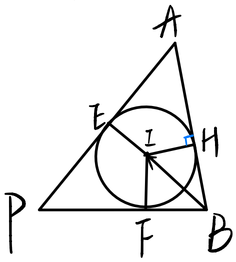
$S_{\triangle BOC}:S_{\triangle AOC}:S_{\triangle AOB}=\tan A:\tan B:\tan C$

$\Rightarrow \tan A\cdot\vec{OA}+\tan B\cdot\vec{OB}+\tan C\cdot\vec{OC}=\vec{0}$

$\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|\cdot\cos B}+\frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|\cdot\cos C}$

垂线的意思

例：已知：I为△ABC的内心，$|\vec{PA}|-|\vec{PB}|=4$，$|\vec{PA}-\vec{PB}|=10$，则 $\frac{\vec{BI}\cdot\vec{BA}}{|\vec{BA}|}$ 的值



$|\vec{PA}-\vec{PB}|=10$

$|\vec{BA}|=10$

$$\frac{|\vec{BI}||\vec{BA}|\cdot\cos\frac{B}{2}}{|\vec{BA}|}=|\vec{BH}|=3$$

$\therefore |\vec{BH}|=$ $\begin{cases} \because PE=PF \\ AE=AH \\ BF=BH \end{cases}$

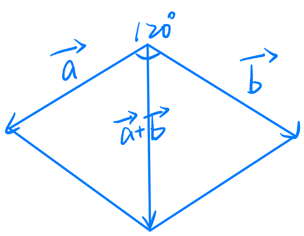
$\because PF+FB+AH+BH-AE-PE$

$=2BH=PB+AB-PA=10-4=6$

$\therefore BH=3$

向量中的数形结合：

例：$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|\neq 0$，那么 $\vec{a}-\vec{b}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角？



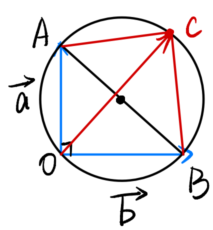
菱形 120° 才会有 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$

且 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|$

例：已知 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 互相垂直的单位向量，若 $\vec{c}$ 满足 $(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0$，则 $|\vec{c}|$ 的max？

$\Downarrow$

$(\vec{a}-\vec{c})\perp(\vec{b}-\vec{c})$



AB为直径做圆

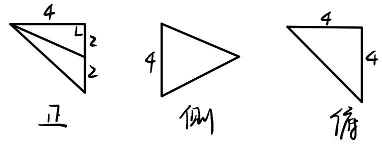
在圆上任取C点，设 $\vec{OC}=\vec{c}$，

都有 $\vec{a}-\vec{c}\perp\vec{b}-\vec{c}$

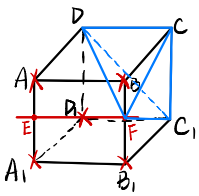
故 $|\vec{c}|_{max}=\sqrt{2}$

立体几何：
- 大T：考//，⊥，体积，二面角，线面角.
- 小T：三视图，体积，异面直线，线面角，最值问T，外接球，平行，垂直判定.

1. 三视图：
   - 1° 瞪眼法
   - 2° 扣点法（2014国I，12T）：



将三视图放正方体内看



① 正视图可知能扣除 A_1，D_1

② 侧视图可知能扣除 B，B_1，但一定在EF线上有一个点. 可知是F点留下来了.

③ 俯视图可知能扣除 AA_1，AD，A_1D_1，AB，A_1B_1 这几条线

故：原图形 三棱锥 $F-DCC_1$

2. 体积：
   - 1° 直接套公式求
   - 2° 换顶点.

体积公式：

$$\begin{cases} V_{柱体} = S_{底}\cdot h \\ V_{锥体} = \frac{1}{3}\cdot S_{底}\cdot h \\ V_{台体} = \frac{1}{3}\cdot(S_{上}+\sqrt{S_{上}\cdot S_{下}}+S_{下})\cdot h \\ V_{球} = \frac{4}{3}\pi R^3 \end{cases}$$

表面积：

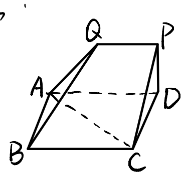
$$\begin{cases} S_{圆柱} = 2\pi r\cdot(r+l) \\ S_{圆锥} = \pi r\cdot(r+l) \\ S_{圆台} = \pi\cdot(r^2+R^2+rl+Rl) \\ S_{球} = 4\pi R^2 \end{cases}$$

侧面积公式：

$$\begin{cases} S_{圆柱侧} = 2\pi rl \\ S_{圆锥侧} = \pi r\cdot l \\ S_{圆台侧} = \pi\cdot(r+R)\cdot l \end{cases}$$

换顶点：

① eg:

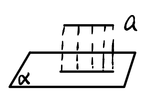


V_{Q-ABC}

V_{P-ABC}

V_{A-PBC}

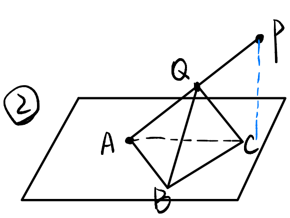
……



$a \parallel \alpha$，

a上任一点到α面的距离都相等.

②



Q为PA中点，求 V_{Q-ABC}

$= \frac{1}{2} V_{P-ABC} = \frac{1}{2} V_{A-PBC}$

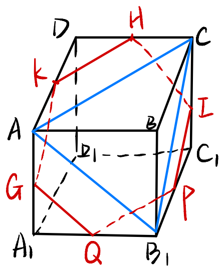
3. 异面直线所成角：

①几何法：先平移，后余弦th. $\theta\in(0,\frac{\pi}{2}]$

②建系：

③2015国Ⅰ：平移，补体（正方体，长方体）

2018国Ⅰ，12T：已知正方体棱长为1，每条棱所在直线与平面α所成角都相等，则α截此正方体所得截面面积max？



题干可知：所成角都相等.

故：$\alpha \parallel AB_1C$

问：何时α截得S_{max}呢？

答：当α是面KHIPQG时，故 $S=6\cdot(\frac{1}{2}\cdot KH^2\cdot\sin60^\circ)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

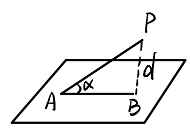
A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 线面角：

1° 几何法　$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2}]$

$\sin\alpha=\frac{d}{|PA|}$



P到底面距离为d

若求不出来，用体积桥法.

2° 建系法：

$\frac{|\vec{m}\cdot\vec{PA}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{PA}|}=|\cos\theta|=\sin\alpha$　[老大了让求正弦值时不要再sin和cos互化了]

1. 线线角：$\cos\theta=\lvert\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\rvert$	3. 二面角：锐角：$\cos\theta=\lvert\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle\rvert$
2. 线面角：$\sin\theta=\lvert\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\rvert$	钝角：$\cos\theta=-\lvert\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle\rvert$

5. 用向量法求空间中的距离：

① 异面直线a，b间的距离：$d=\frac{|\vec{AB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$，其中 $\vec{n}\perp a$，$\vec{n}\perp b$，$A\in a$，$B\in b$

② 直线a与α面间距离：$d=\frac{|\vec{AB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$，其中 $A\in a$，$B\in\alpha$，$\vec{n}$是面α的法向量.

③ 两平行平面α，β之间的距离：$d=\frac{|\vec{AB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$，其中 $A\in\alpha$，$B\in\beta$，$\vec{n}$是面α的法向量.

④ 点A到平面α的距离：$d=\frac{|\vec{AB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$，其中 $B\in\alpha$，$\vec{n}$是面α的法向量.

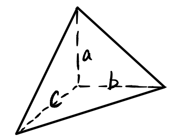
⑤ 点A到直线a的距离：$d=\sqrt{|\vec{AB}|^2-\left(\frac{\vec{AB}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|}\right)^2}$，其中 $B\in a$，$\vec{a}$是直线a的方向向量.

⑥ 两平行直线a，b之间的距离：$d=\sqrt{|\vec{AB}|^2-\left(\frac{\vec{AB}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|}\right)^2}$，其中 $A\in a$，$B\in b$，$\vec{a}$是直线a的方向向量

6. 外接球：

① 补形法（补成长方体 or 正方体）

$2R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

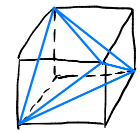


墙角

所有对棱都相等的三棱锥

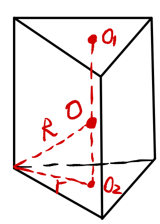
$2R=\sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}}$

$R=\frac{\sqrt{6}}{4}a$.



边长a正四面体
- 高 $h=\frac{\sqrt{6}}{3}a$
- 外接球 $R=\frac{\sqrt{6}}{4}a$
- 内切球 $r=\frac{\sqrt{6}}{12}a$

② 直棱柱外接球：

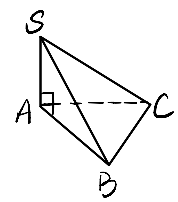


$OO_2=\frac{h}{2}$

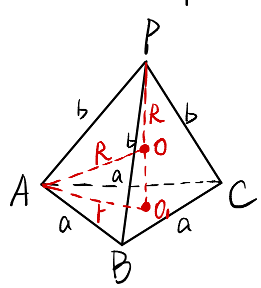
$R^2=\left(\frac{h}{2}\right)^2+r^2$

r用正弦Th求

侧棱垂直于底面的锥的外接球：



③ 正棱锥：底面边长都相等，棱长可以不与底面边长相等.



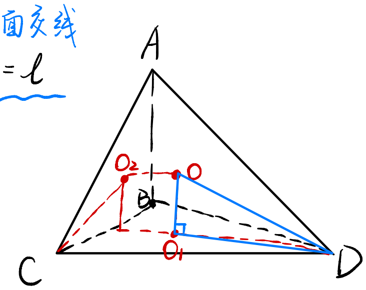
$OO_1=h-R=\sqrt{b^2-r^2}-R$

故：$R^2=(h-R)^2+r^2$

r还是用正弦Th求

④ 面ABC ⊥ 面BCD，$\triangle ABC$与$\triangle BCD$的外接圆半径分别为R_1，R_2，$|BC|=l$ 两垂直面交线

故：三棱锥 A−BCD 的外接球半径 $R^2=R_1^2+R_2^2-\frac{l^2}{4}$



⑤ 两个三角形平面α，β存在夹角，其中外接球半径为R.

则 $R^2=\frac{m^2+n^2-2mn\cos\theta}{\sin^2\theta}+\frac{l^2}{4}$

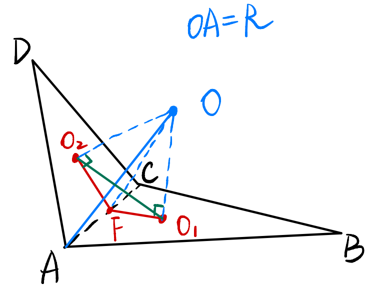
m：平面α外接圆圆心到交线距离 O_1F

n：平面β外接圆圆心到交线距离 O_2F

θ：m与n的夹角（钝角时取补）$\angle O_1FO_2$

l：两平面交线长度 AC

$OA=R$



F为AC中点.

OO_1FO_2四点共圆

OF为直径

$\angle O_1FO_2=\theta$

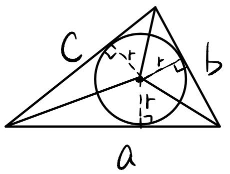
$OF=\frac{O_1O_2}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{m^2+n^2-2mn\cos\theta}}{\sin\theta}$

代入

$R^2=OF^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2$

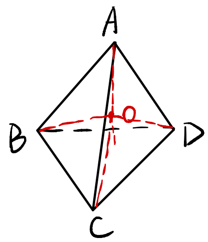
7. 内切球：等体积法

$\boxed{\text{万能公式：} r=\frac{3V}{S}\text{，V为锥体体积，S为表积}}$



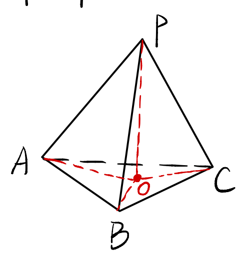
$S_\triangle = \frac{1}{2}\cdot cr + \frac{1}{2}\cdot br + \frac{1}{2}\cdot ar$

↓



$\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot r + \frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ADC}\cdot r + \frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABD}\cdot r + \frac{1}{3}\cdot S_{\triangle BCD}\cdot r = V$

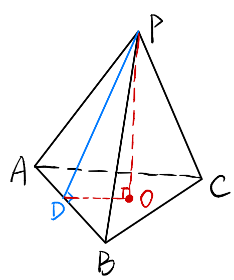
① PA=PB=PC，P在底面投影O为外心.



$PA^2 - PO^2 = AO^2$

⋮

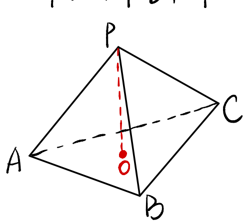
② P到AB，AC，BC距离相等. P投影为内心.



$PD^2 - PO^2 = OD^2$

⋮

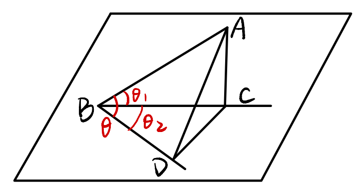
③ PA，PB，PC两两垂直. P在底面投影为垂心.



$\because \begin{cases} PO\perp BC \\ PA\perp BC \end{cases}$

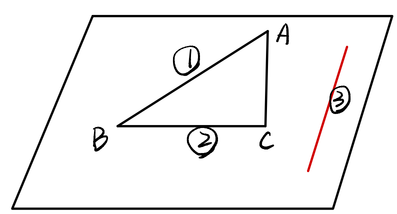
$\therefore BC\perp$ 面OAP　　$\therefore BC\perp OA$

爪子Th:



$\cos\theta = \cos\theta_1\cdot\cos\theta_2$

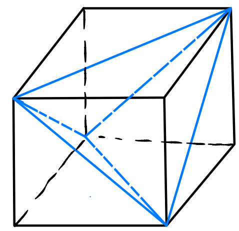
三垂线Th:



若 ② ⊥ ③

则 ① ⊥ ③

正四面体结论:



设正四面体的棱长为a

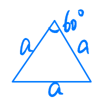
1. 对棱间距 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ } 正方体的棱长
 对棱中点连线长 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$

PS: 有球可以和正四面体全部棱相切，该球的R为正方体棱长一半 $\frac{\sqrt{2}}{4}a$

2. 正四面体的高 $\frac{\sqrt{6}}{3}a = (\frac{2}{3}l$, l为正方体的体对角线)

3. 正四面体的 $V=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ ($V_{正方体} - 4V_{三个小三棱锥} = \frac{1}{3}V_{正方体}$)

4. 正四面体的全面积 $S_{全}=\sqrt{3}a^2$



$S_{\triangle}=\frac{1}{2}\times a^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 故 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times4=\sqrt{3}a^2$

5. 正四面体的中心到底面与顶点的距离之比为 1:3
 ($\frac{1}{6}l$ 正方体体对角线 : $\frac{1}{2}l$ 正方体体对角线)

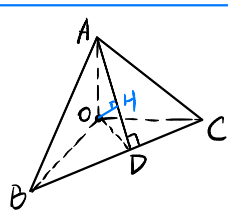
6. 外接球的半径 $\frac{\sqrt{6}}{4}a$
 内接球的半径 $\frac{\sqrt{6}}{12}a$

7. 对棱相互垂直

} 放正方体中看.

8. 正四面体内的任意一点到四个面的距离之和为定值(等于四面体的高)

直角四面体:

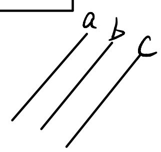


$\angle AOB=\angle AOC=\angle BOC=90^\circ$

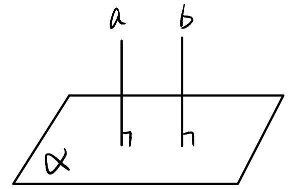
1. 不含直角的面ABC，$\triangle ABC$为锐角三角形
2. 直角顶点O在底面上的射影H是$\triangle ABC$的垂心.
3. $V=\frac{1}{6}\cdot OA\cdot OB\cdot OC$
4. 底面 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{OA^2\cdot OB^2+OB^2\cdot OC^2+OC^2\cdot OA^2}$
5. $S^2_{\triangle BOC}=S_{\triangle BHC}\cdot S_{\triangle ABC}$
6. $S^2_{\triangle BOC}+S^2_{\triangle AOB}+S^2_{\triangle AOC}=S^2_{\triangle ABC}$
7. $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$
8. 外接球半径 $R=\frac{1}{2}\sqrt{OA^2+OB^2+OC^2}$ (补成长方体)
9. 内切球半径 $R=\frac{S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle AOC}-S_{\triangle ABC}}{OA+OB+OC}$

1、空间中两直线平行判定：

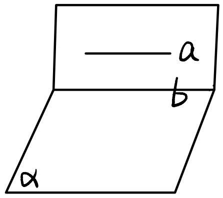
① $\left.\begin{array}{l} a // b \\ b // c \end{array}\right\} \rightarrow a // c$



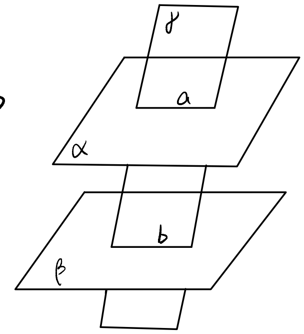
② $\left.\begin{array}{l} a \perp \alpha \\ b \perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow a // b$



③ $\left.\begin{array}{l} a // \alpha \\ a \subset \beta \\ \alpha \cap \beta = b \end{array}\right\} \Rightarrow a // b$

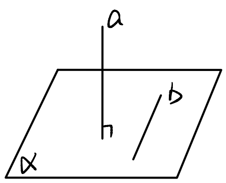


④ $\left.\begin{array}{l} \alpha // \beta \\ \gamma \cap \alpha = a \\ \gamma \cap \beta = b \end{array}\right\} \Rightarrow a // b$

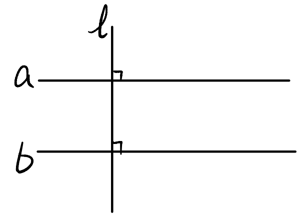


2、空间两直线垂直的判定

① $\left.\begin{array}{l} a \perp \alpha \\ b \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp b$

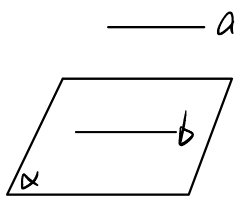


② $\left.\begin{array}{l} a // b \\ l \perp a \end{array}\right\} \Rightarrow l \perp b$

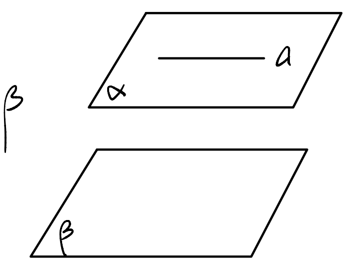


3. 直线与平面平行的判定

① $\left.\begin{array}{l} a \not\subset \alpha \\ b \subset \alpha \\ a // b \end{array}\right\} \Rightarrow a // \alpha$

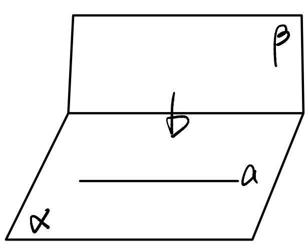


② $\left.\begin{array}{l} \alpha // \beta \\ a \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow a // \beta$



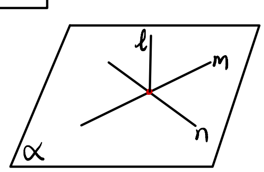
4. 直线与平面平行的性质：

$\left.\begin{array}{l} a // \beta \\ a \subset \alpha \\ \alpha \cap \beta = b \end{array}\right\} \Rightarrow a // b$

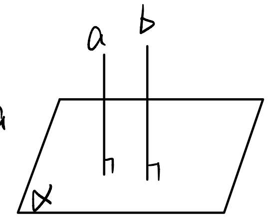


5. 直线与平面垂直的判定

① $\left.\begin{array}{l} m \subset \alpha,\ n \subset \alpha \\ m \cap n = B \\ l \perp m,\ l \perp n \end{array}\right\} \Rightarrow l \perp \alpha$

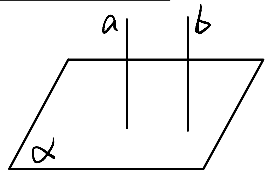


② $\left.\begin{array}{l} a // b \\ a \perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow b \perp a$



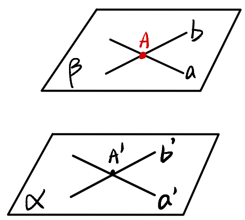
6. 直线与平面垂直的性质:

$$\left.\begin{array}{l} a\perp\alpha \\ b\perp\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow a\parallel b$$

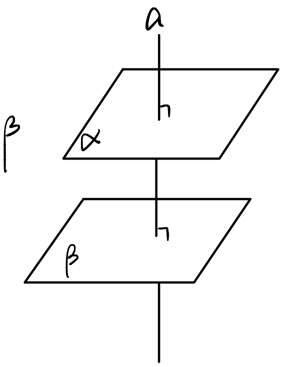


7. 平面与平面平行判定:

① $$\left.\begin{array}{l} a\subset\beta,\ b\subset\beta \\ a\parallel\alpha,\ b\parallel\alpha \\ a\cap b=A \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha\parallel\beta$$

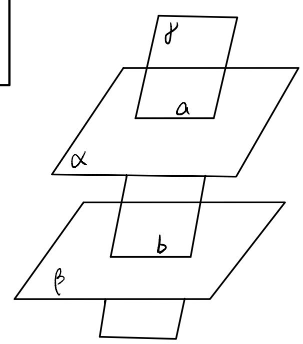


② $$\left.\begin{array}{l} a\perp\alpha \\ a\perp\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha\parallel\beta$$



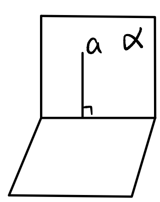
8. 平面与平面平行的性质:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\parallel\beta \\ \alpha\cap\gamma=a \\ \beta\cap\gamma=b \end{array}\right\} \Rightarrow a\parallel b$$



9. 平面与平面垂直的判定:

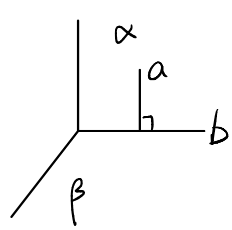
① $$\left.\begin{array}{l} a\subset\alpha \\ a\perp\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha\perp\beta$$



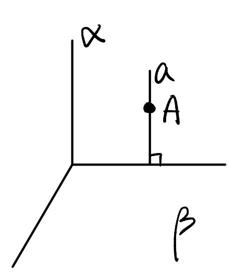
② 二面角的平面角为90°

10. 平面与平面垂直性质:

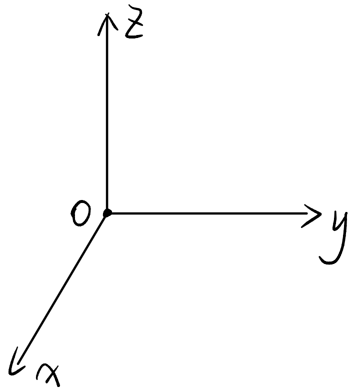
① $$\left.\begin{array}{l} \alpha\perp\beta,\ \alpha\cap\beta=b \\ a\subset\alpha,\ a\perp b \end{array}\right\} \Rightarrow a\perp\beta$$



② $$\left.\begin{array}{l} A\in a,\ A\in\alpha \\ \alpha\perp\beta,\ a\perp\beta \end{array}\right\} \Rightarrow a\subset\alpha$$



空间直角坐标系：



$\boxed{\text{建系时注意，x, y, z轴方向!!}}$

① $\vec{a}=(x_1, y_1, z_1)$

$\vec{b}=(x_2, y_2, z_2)$

$$\begin{cases} \vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2) \\ \vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2,\ y_1-y_2,\ z_1-z_2) \\ \vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \\ \vec{a}\parallel\vec{b} \Rightarrow \dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2} \\ \vec{a}\perp\vec{b} \Rightarrow x_1\cdot x_2+y_1y_2+z_1z_2=0 \\ |\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2} \\ \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta \\ \cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} \end{cases}$$

② $A(x_1, y_1, z_1)$

$B(x_2, y_2, z_2)$

$|OA|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$

$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$

中点坐标 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}, \dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$

巧[illegible]向量法：叉乘法

若 $\vec{AB}=(x, y, z)$，$\vec{CD}=(a, b, c)$

设：平面ABCD的法向量 $\vec{n}=(x_0, y_0, z_0)$，

则有 $x_0=\begin{vmatrix} y & z \\ b & c \end{vmatrix}=yc-bz$，$y_0=-\begin{vmatrix} x & z \\ a & c \end{vmatrix}=-(xc-az)$，$z_0=\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix}=xb-ay$

直线：

① $y-y_0=k(x-x_0)$

② $y=kx+b$

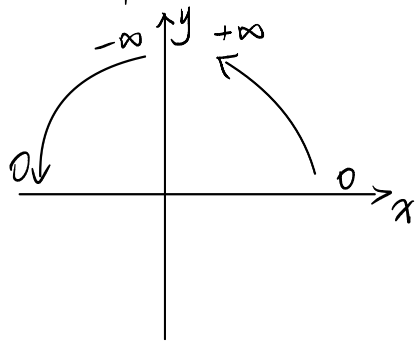
③ $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$

④ $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ （不能垂直于 x, y 轴，不能过原点）

⑤ $Ax+By+c=0$

⑥ $x=ty+m$ （不含水平）

斜率 $k=\tan\alpha$

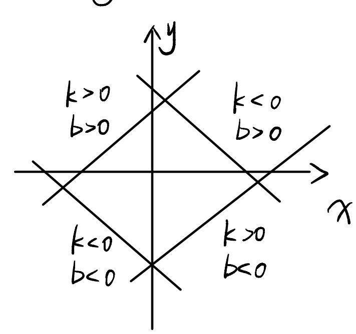


1. 平行，垂直条件：$\begin{cases} k_1\cdot k_2=-1 & \text{（两直线垂直）} \\ k_1=k_2 & \text{（两直线平行）} \end{cases}$

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} /\!/ : A_1B_2-A_2B_1=0 \text{ 且 } A_1C_2\neq A_2C_1 \text{ 或 } B_1C_2\neq B_2C_1 \\ \perp : A_1A_2+B_1B_2=0 \end{cases}$$

2. 对称（详情见函数那部分）

$y=kx+b$

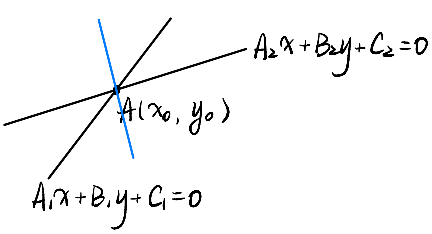


3. 两点间距离公式：$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

点到直线的距离：$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

两平行直线间距离：$d=\dfrac{|C_2-C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

4. 直线系方程：



过交点 $A(x_0,y_0)$ 的直线都可以设为

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2x+C_2)=0$$

1. 直线

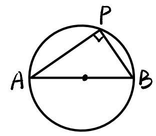
2. 过交点 A.

圆：

1. 定义：

① 定点 $A(x_A, y_A)$，满足动点 $|PA| = k$（定值）

② A.B 定点，P 动点



③ 阿波罗尼斯圆.

圆的方程：

① 标准方程：

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

圆心 (a,b)，半径 r

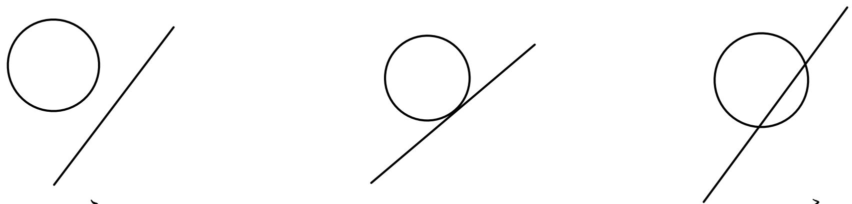
② 一般方程：

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

圆心 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$，$r=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$

其中 $D^2+E^2-4F>0$

2. 直线和圆的位置关系：（圆心到直线的距离）

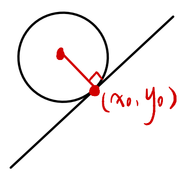


相离 $d>r$　　相切 $d=r$　　相交 $d<r$

圆上动点A到直线距离min　　圆上动点A到直线距离max

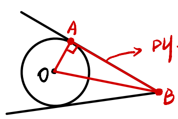
3. 相切：

① 从圆上一点 (x_0, y_0) 作切线



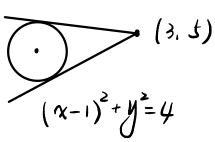
$$\boxed{\begin{gathered}(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\\ \downarrow\\ (x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2\end{gathered}}$$

② 从圆外一点作切线



→ 叫切线长 $= OB^2 - r^2$

eg:



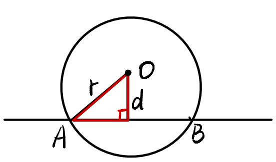
设：切线 $y-5=k(x-3)$

$(1,0)$，　$\downarrow$ $kx-y+5-3k=0$

$d=\frac{|k+5-3k|}{\sqrt{k^2+1}}=2$

$\boxed{\text{注意讨论}k\text{不存在的情况}}$

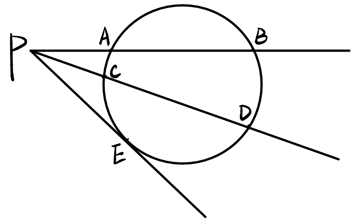
4. 相交：



在圆中求弦长一定要用垂径Th来算.

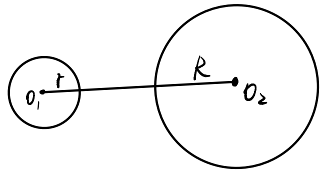
$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}$

5. 切割线Th：



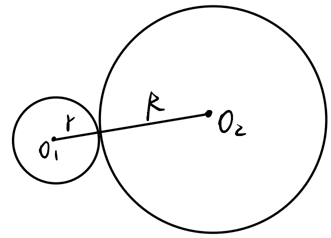
$PA \cdot PB = PC \cdot PD = PE^2$

6. 圆与圆的位置关系:



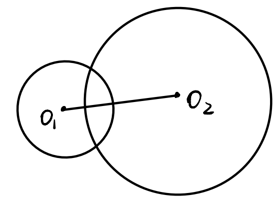
相离: $|O_1O_2| > R+r$

公切线: 4条



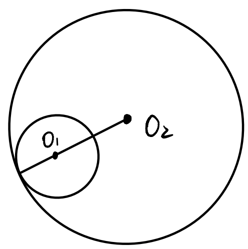
相切: $|O_1O_2| = R+r$

公切线: 3条



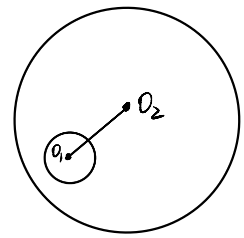
相交: $R-r < |O_1O_2| < R+r$

公切线: 2条



内切: $|O_1O_2| = R-r$

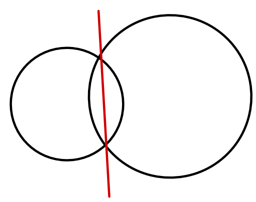
公切线: 1条



内含: $|O_1O_2| < R-r$

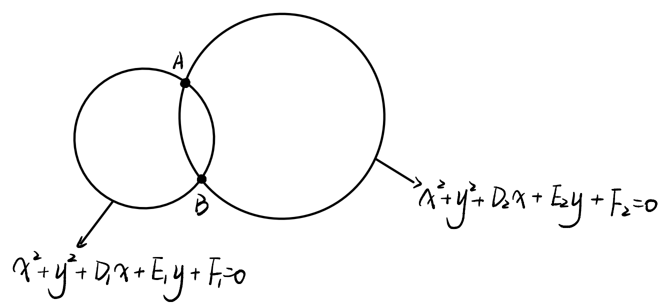
公切线: 无

公共弦方程:



两圆方程相减的结果就是公共弦方程.

7. 圆系方程:

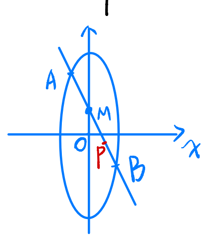


过A,B两点的圆:

$$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F+\lambda(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$$

消参法: eg: 已知 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$, 过点 $M(0,1)$ 的直线 l 交椭圆于A,B两点, l 上动点P满足 $\vec{OP}=\frac{1}{2}(\vec{OA}+\vec{OB})$

求点P轨迹?



① 当k存在时, l: $y=kx+1$ $\quad A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$

$\vec{OP}=\frac{1}{2}(\vec{OA}+\vec{OB})=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$\begin{cases} y=kx+1 \\ x^2+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases} \Rightarrow (4+k^2)x^2+2kx-3=0$

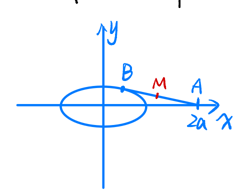
$x_1+x_2=-\frac{2k}{4+k^2}$, $x_1x_2=\frac{8}{4+k^2}$

故 $P\left(\frac{-k}{4+k^2},\frac{4}{4+k^2}\right) \longrightarrow$ 消参得: $4x^2+y^2-y=0$

$x=\frac{-k}{4+k^2}$, $y=\frac{4}{4+k^2}$

② 当k不存在时, 也满足此方程

转移法: eg: 点B为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的动点, $A(2a,0)$ 求线段AB中点M的轨迹方程.



设: $M(x,y)$

中点公式可知:

$\left(\frac{2a+x_B}{2},\frac{0+y_B}{2}\right)$

$\Downarrow$

(x,y)

故: $\begin{cases} x_B=2x-2a \\ y_B=2y \end{cases}$

代入曲线方程中 $\frac{(2x-2a)^2}{a^2}+\frac{(2y)^2}{b^2}=1$

求轨迹的6种方法：

1、直接法：

根据已知条件及一些基本公式（两点间距离公式、点到直线距离公式、直线的斜率公式…）直到列出动点满足的等量关系式，从而求得轨迹方程。

2、定义法：

通过图形的几何性质判断动点的轨迹是何种图形，再求其轨迹方程，这种方法叫定义法。一定要熟练掌握常用轨迹的定义，如：线段的垂直平分线、圆、椭圆、双曲线、抛物线等等。还要熟练掌握平面几何的一些性质定理。

3、点差法

4、转移法（代入法）求谁设谁：

转移法求曲线方程时一般有两个动点，一个是主动，一个是被动的。

当题目中的条件同时具有以下特征时一般都可以用转移法：

①某个动点P在已知方程的曲线上移动；

②另一个动点M随P的变化而变化；

③ 在变化过程中P和M满足一定规律。

5、交轨法：

若动点是两曲线的交点，可以通过这两曲线的方程直接求出交点方程，也可以解方程组先求出交点的参数方程，再化为普通方程。

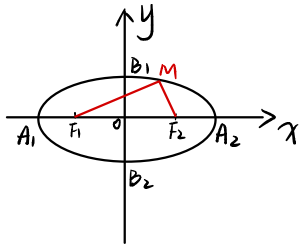
6、参数法：

选取适当的参数，分别用参数表示动点坐标x，y，得出轨迹的参数方程，消去参数，即得其普通方程，选参数时必须首先充分考虑到制约动点的各种因素，然后选取合适的参数，因为参数不同，会导致运算量不同，常见的参数有截距、角度、斜率、线段长度等等。

圆锥曲线：

1. 图象：

公式：



$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$

$\begin{cases} 长轴：|A_1A_2|=2a \\ 短轴：|B_1B_2|=2b \end{cases}$

焦点 $(\pm c, 0)$

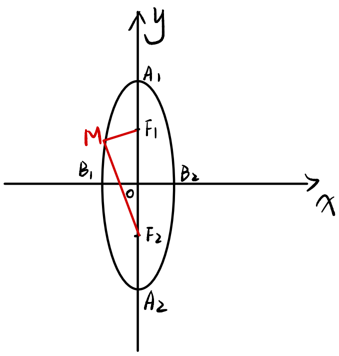
离心率：$e=\frac{c}{a} \quad (0<e<1)$

$c^2=a^2-b^2$

焦距 $|F_1F_2|=2c$

①两点间距离公式
②第二定义
→ 证明 ←

焦半径：$M(x_0,y_0)$ $\begin{cases} |MF_1|=a+ex_0 \\ |MF_2|=a-ex_0 \end{cases}$



$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$

焦点：$(0,\pm c)$

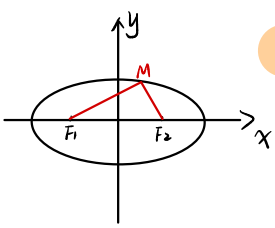
离心率：$e=\frac{c}{a} \quad (0<e<1)$

$c^2=a^2-b^2$

焦距 $|F_1F_2|=2c$

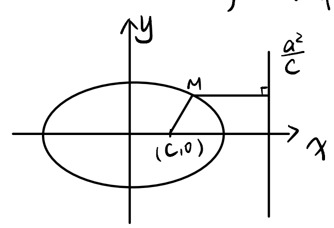
焦半径：$M(x_0,y_0)$ $\begin{cases} |MF_1|=a-ey_0 \\ |MF_2|=a+ey_0 \end{cases}$

第一定义：到两定点 F_1、F_2 的距离之和为 $2a$

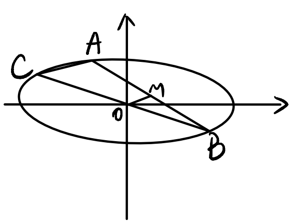


$|MF_1|+|MF_2|=2a \quad (2a>|F_1F_2|)$

第二定义：$\frac{到定点的距离 \ \ 焦点(c,0)}{到定直线的距离 \ \ 准线\ x=\frac{a^2}{c}}=e$



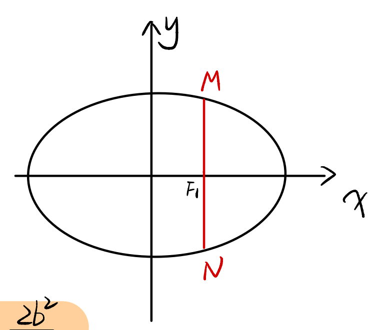
第三定义：曲线上任意点A到B.C（关于原点对称）



$k_{AB}\cdot k_{OM}=-\frac{b^2}{a^2}$

$k_{AB}\cdot k_{AC}=-\frac{b^2}{a^2}$

通径：



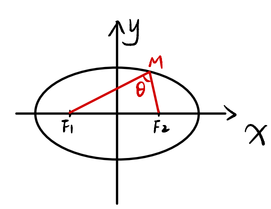
$|MN|=\frac{2b^2}{a}$

弦长公式：$\begin{cases} M(x_1,y_1) \\ N(x_2,y_2) \end{cases}$

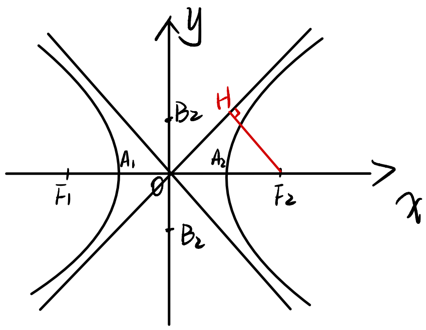
$|MN|=\sqrt{k^2+1}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{\frac{1}{k^2}+1}\cdot|y_1-y_2|$

$=\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

焦点三角形：



$S_\triangle=b^2\cdot\tan\frac{\theta}{2} \quad (\theta=\angle F_1MF_2)$



$\triangle OHF_2$中，$OH=\sqrt{c^2-b^2}=a$

$F_2H=b$

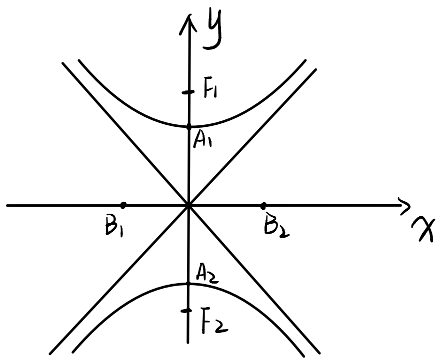
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,b>0)$ $\begin{cases}\text{实轴 } |A_1A_2|=2a \\ \text{虚轴 } |B_1B_2|=2b\end{cases}$

焦点 $(\pm c,0)$　离心率：$e=\dfrac{c}{a} \quad (e>1)$

渐近线：$y=\pm\dfrac{b}{a}x$　$c^2=a^2+b^2$

$M(x_0,y_0)$ 在左支：$\begin{cases}|MF_1|=-ex_0-a \\ |MF_2|=-ex_0+a\end{cases}$

在右支：$\begin{cases}|MF_1|=ex_0+a \\ |MF_2|=ex_0-a\end{cases}$



$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1 \quad (a>0,b>0)$ $\begin{cases}\text{实轴 } |A_1A_2|=2a \\ \text{虚轴 } |B_1B_2|=2b\end{cases}$

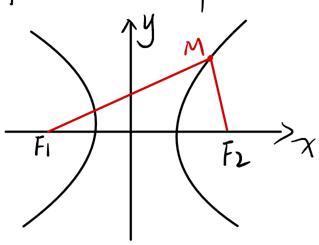
焦点 $(0,\pm c)$　离心率：$e=\dfrac{c}{a} \quad (e>1)$

渐近线：$y=\pm\dfrac{a}{b}x$　$c^2=a^2+b^2$

$M(x_0,y_0)$ 在上支：$\begin{cases}|MF_1|=ey_0-a \\ |MF_2|=ey_0+a\end{cases}$

在下支：$\begin{cases}|MF_1|=-ey_0+a \\ |MF_2|=-ey_0-a\end{cases}$

第一定义：$\big||MF_1|-|MF_2|\big|=2a \quad (0<2a<|F_1F_2|)$



焦点三角形：$S=\dfrac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$

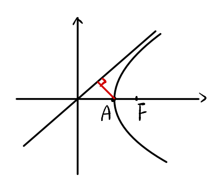
通径：$\dfrac{2b^2}{a}$

双曲线渐近线：

① $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 有共同渐近线的双曲线：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\lambda$

② 焦点到渐近线距离为 b

顶点到渐近线距离为 $\dfrac{ab}{c}$

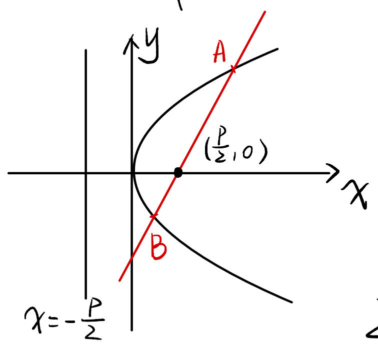


③ 双曲线上∀一点到渐近线距离之积是 $\dfrac{a^2b^2}{c^2}$

④ 直线与渐近线k大小关系决定直线与双曲线有几个交点

抛物线：

$y^2=2px\ (p>0)$



1. 过焦点直线交抛物线于A、B两点：$\begin{cases} x_1x_2=\frac{p^2}{4} \\ y_1y_2=-p^2 \end{cases}$

2. 焦半径：$AF=x_1+\frac{p}{2}$，$BF=x_2+\frac{p}{2}$ / $AF=\frac{p}{1-\cos\alpha}$，$BF=\frac{p}{1+\cos\alpha}$

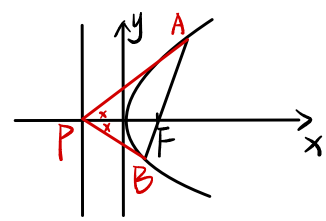
$AB=x_1+x_2+p$

3. 焦点弦：$AB=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$（通径min）

4. $\frac{1}{AF}+\frac{1}{BF}=\frac{2}{p}$，$AF\cdot BF=\frac{p^2}{\sin^2\alpha}$

5. $S_{\triangle AOB}=\frac{p^2}{2\sin\alpha}$

7.

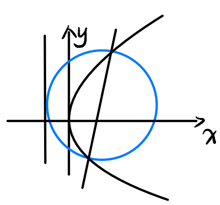


$k_{PA}+k_{PB}=0$

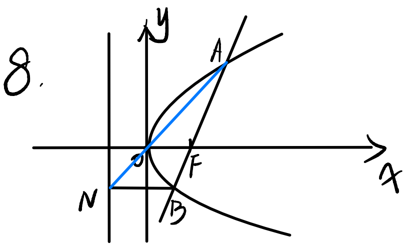
两夹角相等.

6. 相切：

① 以焦点弦为直径的圆相切于准线：



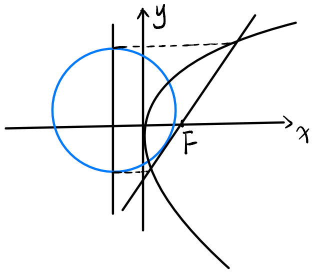
8.



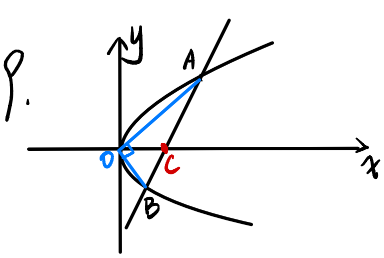
A.O.N在一条直线上

② 以焦半径为直径的圆可与一条坐标轴相切.

③ 过抛物线焦点弦的两端点向准线作垂线，以两垂足为直径端点的圆与焦点弦相切.



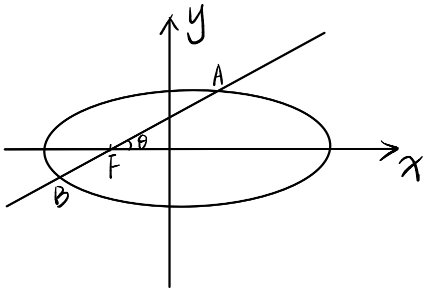
9.



若$\angle AOB=90^\circ$

一定过$C(2p,0)$

常用结论：$\boxed{p=\dfrac{b^2}{c}=\dfrac{a^2}{c}-c}$



$$|AF|=\left|\frac{ep}{1-e\cos\theta}\right|=\left|\frac{b^2}{a-c\cdot\cos\theta}\right|$$

$$|BF|=\left|\frac{ep}{1+e\cos\theta}\right|=\left|\frac{b^2}{a+c\cdot\cos\theta}\right|$$

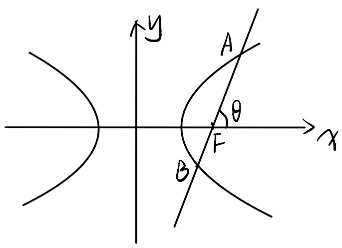
$$|AB|=\left|\frac{2ep}{1-e^2\cdot\cos^2\theta}\right|=\left|\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\theta}\right|$$

若大T：用余弦Th

设：$AF=x$

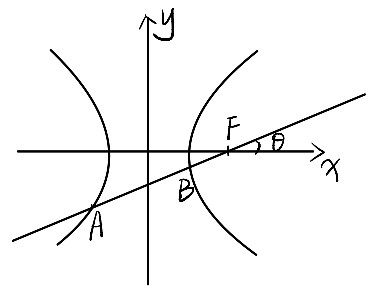
$$(2a-x)^2=x^2+(2c)^2-2\cdot x\cdot(2c)\cdot\cos\theta$$

得：$x=\left|\dfrac{b^2}{a-c\cdot\cos\theta}\right|$



$|AF|$，$|BF|$ 同上

$$|AB|=\left|\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\theta}\right|$$

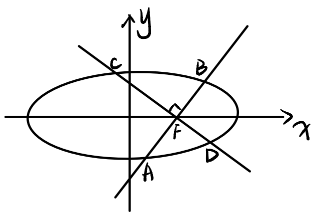


$$|AF|=\left|\frac{ep}{e\cos\theta-1}\right|$$

$$|BF|=\left|\frac{ep}{e\cos\theta+1}\right|$$

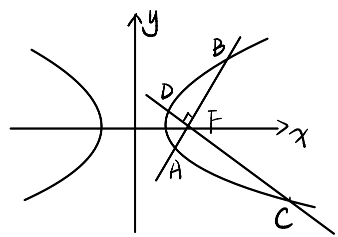
$$|AB|=\left|\frac{2ab^2}{c^2\cdot\cos^2\theta-a^2}\right|$$

以上椭圆 or 双曲线 都是 $\dfrac{1}{AF}+\dfrac{1}{BF}=\dfrac{2}{ep}=\dfrac{2a}{b^2}$



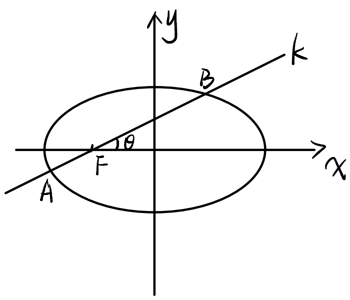
若 $AB\perp CD$，同过焦点，

$$\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}=\frac{2-e^2}{2ep}$$



若 $AB\perp CD$

则 $\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{CD}=\dfrac{2-e^2}{2ep}$



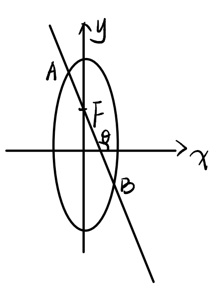
若 $\vec{AF}=\lambda\vec{FB}$

$$|e\cos\theta|=\left|\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|$$

$$e=\sqrt{1+k^2}\cdot\left|\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|$$

双曲线也一样．

抛物线中，$e=1$



若 $\vec{AF}=\lambda\vec{FB}$，

则：$|e\cdot\sin\theta|=\left|\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|$

$$e=\sqrt{1+k^2}\cdot\left|\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|$$

双曲线也一样．

抛物线中，$e=1$

在椭圆中可设：$\dfrac{1}{p^2}=\dfrac{\cos^2\theta}{a^2}+\dfrac{\sin^2\theta}{b^2}$

三角换元：$\begin{cases}x=a\cdot\cos\theta\\ y=b\cdot\sin\theta\end{cases}$

硬件定理：

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ Ax+By+C=0\end{cases} \longrightarrow (a^2A^2+b^2B^2)x^2+2a^2AC\cdot x+a^2(C^2-b^2B^2)=0$$

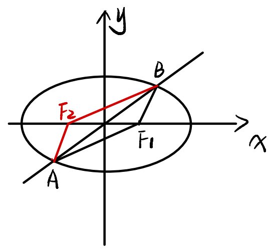
弦长 $|MN|=\frac{2ab\cdot\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sqrt{a^2A^2+b^2B^2-C^2}}{a^2A^2+b^2B^2}$

麻花公式：$x_1y_2+x_2y_1=\frac{2ABa^2b^2}{a^2A^2+b^2B^2}$

焦点三角形面积证明 $\begin{cases} S=\frac{1}{2}\cdot MF_1\cdot MF_2\cdot\sin\theta \\ \cos\theta=\frac{MF_1^2+MF_2^2-F_1F_2^2}{2\cdot MF_1\cdot MF_2}\end{cases}$

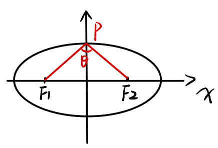
焦点三角形：

① 会补形，eg：



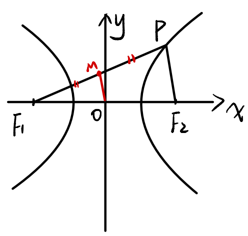
补成平行四边形

② 角的变化：



此时θ角max.

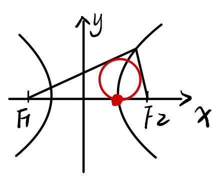
③ 中位线：



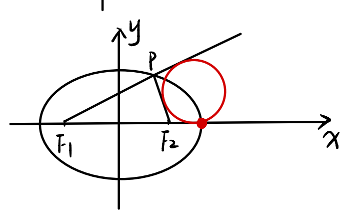
$\begin{cases}MF_1=PM\\ OF_1=OF_2\end{cases}$ 故：$OM \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}PF_2$

④ 角平分线 Th

⑤ 内切圆：



相切点是右顶点.

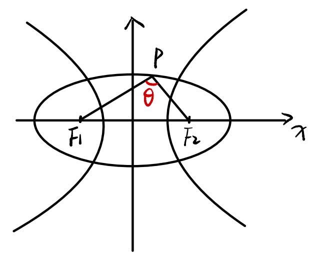


相切点是右顶点

共焦点结论：

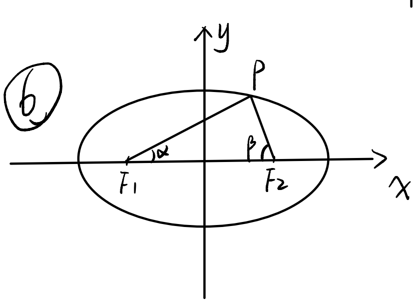
$$\frac{1-\cos\theta}{e_1^2}+\frac{1+\cos\theta}{e_2^2}=2$$

$$\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{e_1^2}+\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{e_2^2}=1$$

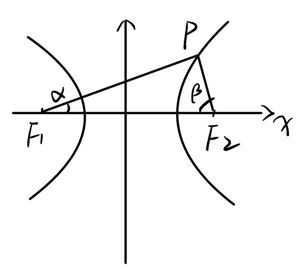


椭圆 e_1，双曲线 e_2

⑥



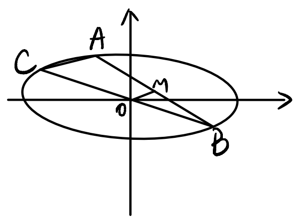
$$e=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}$$



$$e=\left|\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}\right|$$

第三定义与点差法：中点

第三定义：曲线上任意点A到B.C（关于原点对称）



$$k_{AB}\cdot k_{OM}=-\frac{b^2}{a^2}$$

$$k_{AB}\cdot k_{AC}=-\frac{b^2}{a^2}$$

结论：以$P(x_0,y_0)$为中点的弦所在直线

1° 在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$中，$k=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}$

2° 在双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$中，$k=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}$

3° 抛物线$y^2=2px$中，$k=\frac{p}{y_0}$

点差法怎么用：

eg：已知$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$，有一直线交椭圆于A,B两点，AB的中点为$P(x_0,y_0)$

设：$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

$$\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1 & ①\\ \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1 & ②\end{cases}$$

①－②：$\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}+\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$

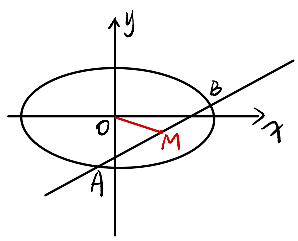
$\because \begin{cases}x_0=\frac{x_1+x_2}{2}\\ y_0=\frac{y_1+y_2}{2}\end{cases}$ 代入

$$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}=0$$

可得出：$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0} \Longrightarrow k_{AB}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{k_{OP}}$

几个常考的点：

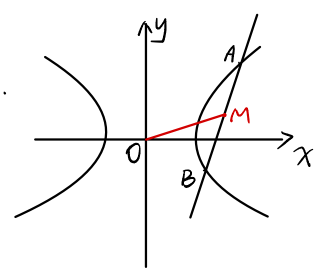
1°



M为中点.

$k_{OM}\cdot k_{AB}=-\frac{b^2}{a^2}$

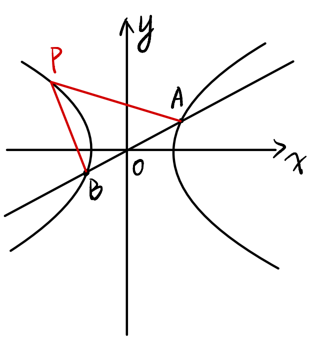
2.



M为中点

$k_{OM}\cdot k_{AB}=\frac{b^2}{a^2}$

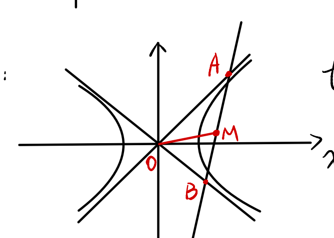
3.



A.B关于原点对称

$k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{b^2}{a^2}$

倘若：

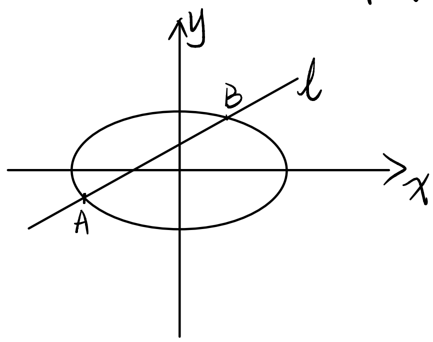


M为中点.

也为 $k_{OM}\cdot k_{AB}=\frac{b^2}{a^2}$

设而不求和双根法

"设而不求"：
① 目标
② 联立
③ 代回



y：某曲线与 $y=kx+m$ 联立得 $Ax^2+Bx+C=0$

① $x_1+x_2=-\frac{B}{A}$，$x_1x_2=\frac{C}{A}$

令 $f(x)=Ax^2+Bx+C$

双根公式

② $(x_1-t)\cdot(x_2-t)=\frac{f(t)}{A}=\frac{At^2+Bt+C}{A}$

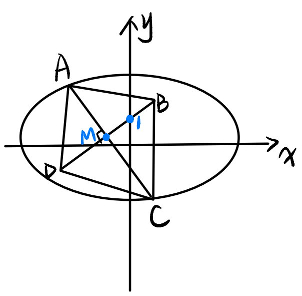
③ $(x_1+t)(x_2+t)=\frac{f(-t)}{A}=\frac{At^2-Bt+C}{A}$

做T时也需要验算 $\Delta>0$ 以确保有2个根.

④ $y_1+y_2=(kx_1+m)+(kx_2+m)=k(x_1+x_2)+2m$

$y_1\cdot y_2=(kx_1+m)\cdot(kx_2+m)=k^2(x_1+\frac{m}{k})\cdot(x_2+\frac{m}{k})=k^2\frac{f(-\frac{m}{k})}{A}$

例：已知菱形ABCD的顶点A，C在椭圆 $x^2+3y^2=4$ 上，对角线BD所在直线的斜率为1。求当直线BD过点(0,1)时，求直线AC的方程.



菱形 $AC\perp BD$，故 $k_{AC}=-1$　　∵ l_{BD}：$y=x+1$

设：$A(x_1,y_1)$　$C(x_2,y_2)$　l_{AC}：$y=-x+m$

中点 $M(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$

① 目标：　M在BD上，即 $\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{x_1+x_2}{2}+1$　$\begin{pmatrix} y_1=-x_1+m \\ y_2=-x_2+m \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (-x_1+m)+(-x_2+m)=x_1+x_2+2$

$\Rightarrow x_1+x_2=m-1$

② 联立：

$\begin{cases} y=-x+m \\ x^2+3y^2=4 \end{cases} \Rightarrow 4x^2-6mx+3m^2-4=0$

则 $x_1+x_2=\frac{6m}{4}=\frac{3m}{2}$

③ 代回：将②的结果代回①中得：$\frac{3m}{2}=m-1$

解：$m=-2$

故 l_{AC}：$y=-x-2$

齐次化：$\begin{cases} 1. \text{求直线过定点} \\ 2. \text{求 } k_1+k_2 \ / \ k_1\cdot k_2 \end{cases}$

注：① $mx+ny=1$ 不能表示过原点的直线.

② 题干尽量有 k_1+k_2 / $k_1\cdot k_2$ / 直线过定点 字样时用.

③ 平移时是在 x, y 上动，$\begin{cases} \text{左}+ \quad \text{右}- \\ \text{上}- \quad \text{下}+ \end{cases}$

操作步骤：
- 第1步：平移直线
- 第2步：联立方程并齐次化
- 第3步：同除 x^2
- 第4步：利用韦达定理证明. 如果让证明直线过定点，还需去还原直线.

eg：若要证AP与AQ的斜率之和 or 积为定值？

① 先将公共点A平移到原点，设平移后的直线 $mx+ny=1$

② 联立，齐次化

一次项乘以 $mx+ny$，常数项乘以 $(mx+ny)^2$，构造出来 $ay^2+bxy+cx^2=0$

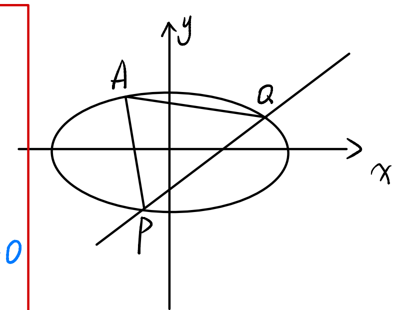
③ 等式两边同除 x^2 [(前面注明 x 不等于0)].

④ 得到：$a\left(\frac{y}{x}\right)^2+b\cdot\frac{y}{x}+c=0$

即：$ak^2+b\cdot k+c=0$

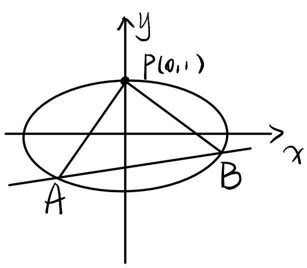
之后利用韦达定理求解.

注意：是否需要平移回去.



例：已知 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，$P(0,1)$，设直线 l 不过点 P，且交椭圆于 A、B 两点.

已知 $k_{PA}+k_{PB}=-1$，证：l 过定点.



第1步：让公共点P平移到原点，椭圆方程变成 $\frac{x^2}{4}+(y+1)^2=1$

设：平移后的 $l'_{AB}=mx+ny=1$

第2步：$x^2+4(y+1)^2=4$

拆开：$x^2+4y^2+8y=0 \xrightarrow[\text{常数项乘 }(mx+ny)^2]{\text{一次项乘 }(mx+ny)} x^2+4y^2+8y\cdot(mx+ny)=0$

整理：$(4+8n)y^2+8mxy+x^2=0$

第3步：同除 x^2，$(4+8n)\frac{y^2}{x^2}+8m\cdot\frac{y}{x}+1=0$

故：$(4+8n)k^2+8m\cdot k+1=0$

$k_1+k_2=-\frac{8m}{4+8n}$，$k_1\cdot k_2=\frac{1}{4+8n}$

第4步：先将直线复原 $mx+n(y-1)=1$

即：$mx+ny-n-1=0$

已知：$k_1+k_2=-1=-\frac{8m}{4+8n}$

故：$2m=1+2n$

化为一个未知量：$x+2nx+2ny-2n-2=0$

即定点 $(2,-1)$

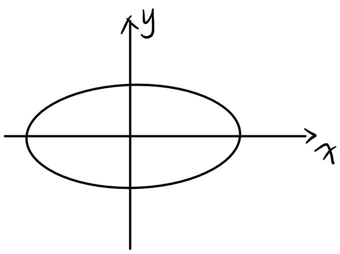
蒙日圆：

曲线：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的两条互相垂直的切线交点P的轨迹是圆 $x^2+y^2=a^2+b^2$

双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 两条互相垂直的切线交点P的轨迹是圆 $x^2+y^2=a^2-b^2$

抛物线：$y^2=2px$ 的两条互相垂直的切线交点P的轨迹是该抛物线准线.

例：点P为直线 $ax+y-4=0$ 上一点，PA、PB是 $C:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1\ (a>1)$ 的2条切线.
恰有一点P，使得 $PA\perp PB$，求e？



P点轨迹 $x^2+y^2=a^2+1$，此圆与 $ax+y-4=0$ 相切.

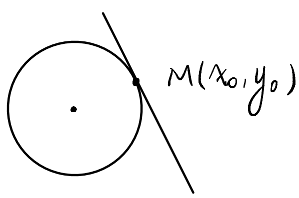
$(0,0)$ 到直线 $ax+y-4=0$ 距离为 $d=\frac{4}{\sqrt{a^2+1}}$

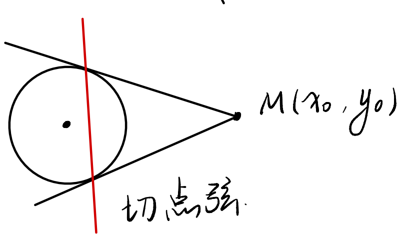
∵ $d=r$ 半径　可得：$a=\pm\sqrt{3}$

∵ $a>1$，故 $a=\sqrt{3}$，可求 $e=\frac{\sqrt{6}}{3}$

圆锥曲线切线方程：

1.

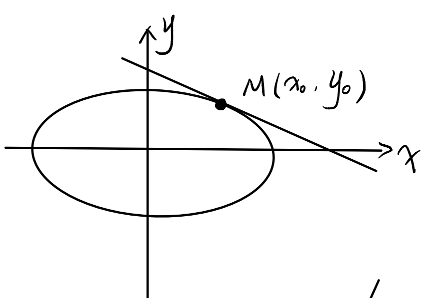


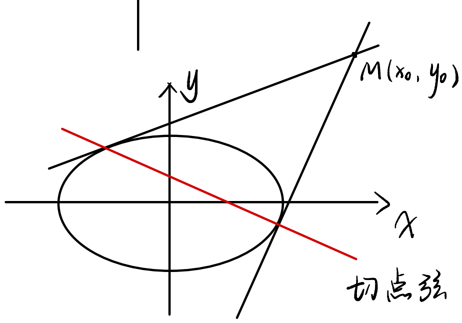


若 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

则：$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$

2.

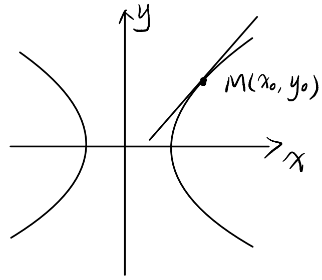


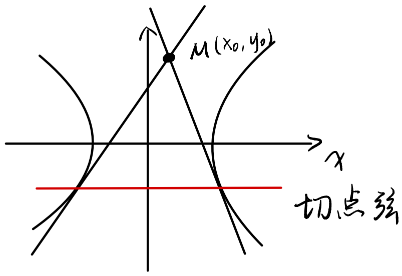


若 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

则 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$

3.

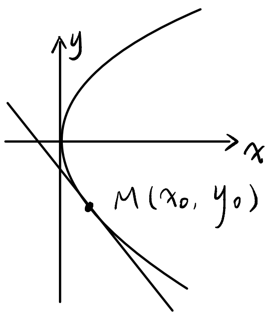


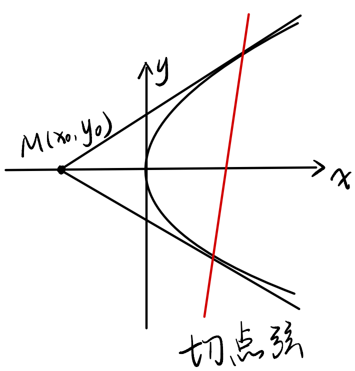


若 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

则 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$

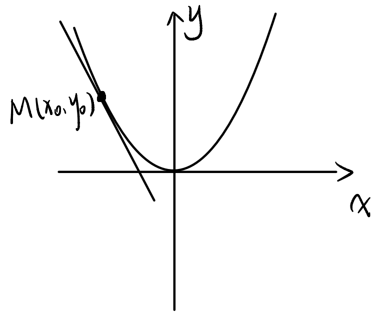
4.

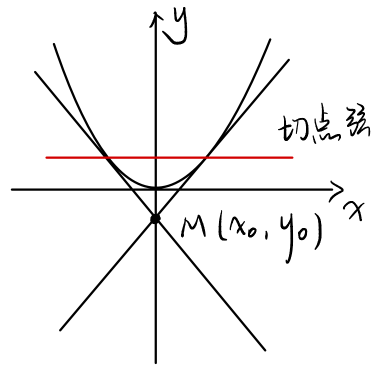




若 $y^2=2px$

则 $y_0y=p(x+x_0)$





求切线可用导数

若 $x^2=2py$

则 $x_0x=p(y+y_0)$

几个特殊方程设法：

1. 椭圆经过 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$，设：方程为 $mx^2+ny^2=1$ $(m>0, n>0)$

2. 双曲线经过 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$，设：方程为 $mx^2-ny^2=1$ $(m>0, n>0)$

3. 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$，有共同渐近线的双曲线设：方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda$ $(\lambda\neq 0)$

4. 已知：$y=\pm\frac{b}{a}x$ 和 $P(x_0, y_0)$，可设双曲线 $m(y+\frac{b}{a}x)(y-\frac{b}{a}x)=0$

数学归纳法：

设：$P(n)$ 表示一个与自然数 n 有关的命题，
第1步：证明 $P(n_0)$ $(n_0 \in N)$ 成立
第2步：假设 $P(k)$ $(k \geq n_0)$ 成立，可推出 $P(k+1)$ 成立
落结论：则 $P(n)$ 对一切自然数 $n \geq n_0$，$n \in N$ 时都成立.

用实例说明一下：

证：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $(n \in N^*)$

① 当 $n=1$ 时，左边：$1^2=1$
右边：$\dfrac{1\times(1+1)\times(2\times1+1)}{6} = 1$，可知等式是成立的.

② 假设当 $n=k$ $(k \in N^*)$ 时等式成立：

有 $1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2 = \dfrac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6}$

那么：（求当 $n=k+1$ 时结果）

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$$

$$= \frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\cdot[(k+1)+1]\cdot[2(k+1)+1]}{6}$$

即当 $n=k+1$ 时也成立.

根据①和②可知等式对任何 $n \in N^*$ 都成立.

概率：

1. 几何概率：
   - ① 线段长度比例
   - ② 面积比例
   - ③ 角度比例
   - ④ 体积比例

2. 古典概型：
   - ① 有限性
   - ② 等可能性

公式：$P(A) = \dfrac{\text{事件A包含数}}{\text{总数}}$

3. 条件概率：$P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 在条件A发生的情况下，事件B发生的概率.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

4. 对立事件：$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

排列组合：$0! = 1$

① 排列：$A_n^m = n(n-1)\cdot(n-2)\cdot \cdots \cdot(n-m+1)$

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$A_n^n = n!\ ,\quad A_n^m = C_n^m \cdot A_m^m$$

② 组合：$C_n^m = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!} = \dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)}{m\cdot(m-1)\cdots 2\cdot 1} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

$$C_n^m = C_n^{n-m}\ ,\quad C_n^0 = 1$$

③ 两个性质：$A_{n+1}^m = A_n^m + m\cdot A_n^{m-1}$

$$C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$$

④ 分步是乘法

分情况是加法

$3! = 6$

$4! = 24$

$5! = 120$

$6! = 720$

$7! = 5040$

$8! = 40320$

$9! = 362880$

$10! = 3628800$

排列组合常见方法:

1. 分配问题:

① 平均分配: 把n个东西平均分配到m个筐里.

方法: 直接选择即可, 不用排列

eg: 把8本不同的书均分给4个人, 有几种方案? $C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 = 2520$

② 不均分配: 把n个不同的东西不平均放到m个筐里. 其中有k个重复.

$\boxed{\text{公式} = \text{①的方法} \cdot \frac{m!}{k!}}$

eg: 5个人分去3个地方, 每地至少有1个人, 有几种方案?

① $1+\underbrace{2+2}_{2\text{个重复}}$ $C_5^1 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 \cdot \frac{3!}{2!} = 5\times6\times3 = 90$

$+ \Rightarrow 150$种

② $\underbrace{1+1}_{2\text{个重复}}+3$ $C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^3 \cdot \frac{3!}{2!} = 5\times4\times3 = 60$

2. 捆绑, 插空, 隔板

3. 对立事件

二项式:

① $(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^n b^0 + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \cdots + C_n^n \cdot a^0 \cdot b^n \quad (n \in N^*)$

$T_{r+1} = C_n^r \cdot a^{n-r} \cdot b^r \quad (0 \le r \le n)$

② 性质: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$

奇偶: $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots$

$= C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots$

$= 2^{n-1}$

增减性: $\begin{cases} \text{当 } r \le \frac{n+1}{2} \text{ 时, 二项式系数 } C_n^r \text{ 的值} \uparrow \\ \text{当 } r \ge \frac{n+1}{2} \text{ 时, 二项式系数 } C_n^r \text{ 的值} \downarrow \end{cases}$

故: $\begin{cases} \text{当}n\text{为偶数, 中间项(第}\frac{n}{2}+1\text{项)的 } C_n^{\frac{n}{2}} \text{ 取 max} \\ \text{当}n\text{为奇数, 中间两项(第}\frac{n+1}{2}\text{和}\frac{n+1}{2}+1\text{项)的二项式系数 } C_n^{\frac{n-1}{2}} = C_n^{\frac{n+1}{2}} \text{ 相等并列 max.} \end{cases}$

③ 若有3项怎么办？ 挑项即可/分配

eg: $\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{x}+\sqrt{2}\right)^5$ 的常数项？

① $C_5^5\cdot(\sqrt{2})^5$

② $C_5^1\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^1\cdot C_4^1\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^1\cdot C_3^3\cdot(\sqrt{2})^3$

③ $C_5^2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot C_3^2\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2\cdot C_1^1\cdot(\sqrt{2})^1$

相加得 $\frac{63}{2}\sqrt{2}$

④ 系数最大项求法：

设第r项系数 A_r max，那么可列 $\begin{cases} A_r \geq A_{r+1} \\ A_r \geq A_{r-1} \end{cases}$ 可求解出r

Ps：数列也可以用此法

2011浙江17T：已知 $a_n = n\cdot(n+4)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$，max为 a_k，求k值？

$\begin{cases} a_k > a_{k+1} \longrightarrow k<-\sqrt{10} \text{ or } k>\sqrt{10} \\ a_k > a_{k-1} \longrightarrow 1-\sqrt{10}<k<1+\sqrt{10} \end{cases}$

$\sqrt{10} < k < 1+\sqrt{10}$

故 $k=4$

⑤ 赋值法：

若 $(ax+b)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$

令 $f(x) = (ax+b)^n$

可求 1° $a_0 = f(0)$

2° $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = f(1)$

3° $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n\cdot a_n = f(-1)$

4° $a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + \cdots = \frac{f(1)+f(-1)}{2}$

5° $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots = \frac{f(1)-f(-1)}{2}$

随机变量及其分布：

2019国Ⅱ,18T：

1. 互斥事件：$P(A+B)=P(A)+P(B)$　　“互斥”是“对立”必要不充分条件.

2. 对立事件：$P(\bar{A})=1-P(A)$

3. 相互独立事件：$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$　　$P(AB)$是AB两个事件同时发生

4. 独立重复实验：如果在1次试验中某事件发生概率为p，那么在n次独立重复试验中这个试验恰好发生k次的概率：

$$P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}\quad(k=0,1,2,\cdots n)$$

5. 条件概率：$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}\rightarrow$ 除条件.　$(P(A)>0)$

6. 离散型随机变量分布列：

①两点分布：

X	0	1
P	$1-p$	p

$E(x)=p$，$D(x)=p\cdot(1-p)$

答T规范：①先写X所有可能取的值.
②$P(x=a)=b$，$P(x=c)=d$ ……
③列表格.

②二项分布：$P(X=k)=C_n^k\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$

X	0	1	…	k	…	n
P	$C_n^0\cdot p^0\cdot(1-p)^n$	$C_n^1\cdot p^1\cdot(1-p)^{n-1}$	…	$C_n^k\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$		$C_n^n p^n\cdot(1-p)^0$

记作：$X\sim B(n,p)$

$E(x)=np$，$D(x)=np(1-p)$

该模型是抽完后放回.

③超几何分布：在含有M件次品的N件产品中，任取n件，其中恰有X件次品数，则事件$\{X=k\}$发生的概率

$$P(X=k)=\frac{C_M^k\cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

X	0	1	……	a
P	$\dfrac{C_M^0\cdot C_{N-M}^{n-0}}{C_N^n}$	$\dfrac{C_M^1\cdot C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$		$\dfrac{C_M^a\cdot C_{N-M}^{n-a}}{C_N^n}$

该模型是抽完后不放回.

7. 离散型随机变量的均值、方差：

① 均值，期望：

x	x_1	x_2	x_3	…	x_n
P	P_1	P_2	P_3		P_n

$E(x)=x_1\cdot P_1+x_2\cdot P_2+x_3\cdot P_3+\cdots+x_n\cdot P_n$

性质：$E(ax+b)=a\cdot E(x)+b$

② 方差，标准差 $\sqrt{D(x)}$

$$D(x)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(x))^2\cdot P_i$$

$$=(x_1-E(x))^2\cdot P_1+(x_2-E(x))^2\cdot P_2+\cdots+(x_n-E(x))^2\cdot P_n$$

性质：① $D(ax+b)=a^2\cdot D(x)$

② $\begin{cases} D(x)\text{越小，X的稳定性越高，波动越小，取值越集中} \\ D(x)\text{越大，X的稳定性越低，波动越大，取值越分散} \end{cases}$

8. 正态分布

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$x\in R$，$\mu$、$\sigma$是参数．$\sigma>0$，$-\infty<\mu<+\infty$．

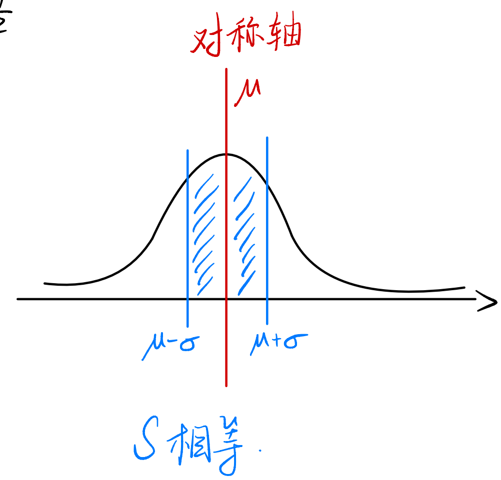
记作 $N(\mu,\sigma^2)$，服从正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

① 总面积 $S=1$，对称轴 $x=\mu$ 左右两侧面积为 $\frac{1}{2}$

② $\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$ 标准正态分布．

③ 期望 μ，方差 σ^2

④ 3σ 准则：$\begin{cases}(\mu-\sigma,\ \mu+\sigma)=0.6827 \\ (\mu-2\sigma,\ \mu+2\sigma)=0.9545 \\ (\mu-3\sigma,\ \mu+3\sigma)=0.9973\end{cases}$



统计:

① 三大抽样方法:
- 1. 简单随机抽样
- 2. 分层抽样: 按比例抽样
- 3. 系统抽样: 1, 2, 3 ……

② 平均数: $\overline{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \cdots + x_n p_n$ (p是频率)

方差: $S^2 = \frac{1}{n}\cdot[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$

标准差: $S = \sqrt{\frac{1}{n}\cdot[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]}$

若有一组数 $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_n$ 的平均数为 $\overline{x}$, 方差 S^2

那么当 $ax_1+b, ax_2+b, \cdots\cdots ax_n+b$ 时, 平均数为 $a\overline{x}+b$, 方差为 $a^2 S^2$

③ 中位数: 总个数
- 奇: 取中间即可
- 偶: 取中间的2个数 求平均

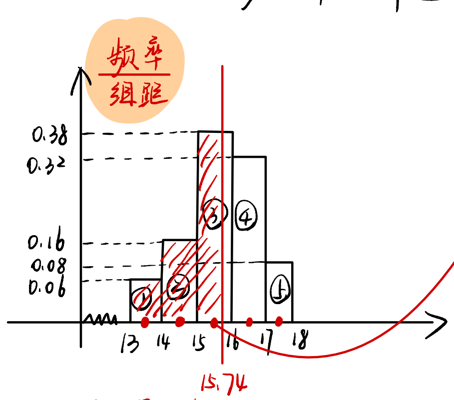
一定要先从小到大排好序再开始做了.

④ 众数: 出现次数最多的那个数

⑤ 方差代表数据波动性.

⑥ 茎叶图

⑦ 频率分布直方图:
- 众数: 取最高小长方体横标中点
- 中位数: 把图划分为左右两个面积0.5的x值.
- 平均数: 每个小长体中间点乘小长体面积



阴影部分面积就为0.5

众数: 15.5

中位数: $S_① = 0.06$, $S_② = 0.16$, $S_③ = 0.38$ } 相加发现得 $0.6 > 0.5$

可知需到方程处在③中x多少是让左侧面积为0.5.

$S_① + S_② = 0.22$

$0.5 - 0.22 = 0.28$

设: 在③中有 $0.38x = 0.28$

解: $x \approx 0.74$

故: 中位数为15.74

平均数: $13.5\cdot S_① + 14.5\cdot S_② + 15.5\, S_③ + 16.5\, S_④ + 17.5\cdot S_⑤$

相关系数：

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\bar{y}^2\right)}}$$

$-1\le r\le 1$，$\begin{cases}\text{当 } 0<r\le 1\text{，说明正相关}\\ \text{当 } -1\le r<0\text{，说明负相关}\end{cases}$

注：r 值靠近 ±1 时，说明相关性强；靠近 0 时，说明相关性弱。

回归直线方程：

① 直线必过样本中心 $(\bar{x},\bar{y})$

② 结果为估算值，并非准确值.

③ 直线斜率与 r 同 + 同 −

④ 计算 $\hat{y}=bx+a$ 的方法：

① 先算 $\bar{x}$，$\bar{y}$

② 算 $b=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\cdot\bar{x}^2}$

③ 将 $(\bar{x},\bar{y})$ 代入直线求 a

独立性检验：

	y_1	y_2	总计
x_1	a	b	$a+b$
x_2	c	d	$c+d$
总计	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)\cdot(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$n=a+b+c+d$

$P(K^2\ge k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

若求出 $K^2\approx7.8$

那应该选 $P(K^2=k)=0.010$

也就说明 $1-0.010=99\%$ 把握

定积分：

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{计算：} \int_a^b f(x)\,dx = f(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a) \\ \quad\text{其中 } F'(x)=f(x)\end{array}}$$

几个常见的：

$\int k\,dx = kx + C$

$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a\neq -1)$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

$\int \cos x\,dx = \sin x + C$

$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$

$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$

$\int e^x\,dx = e^x + C$

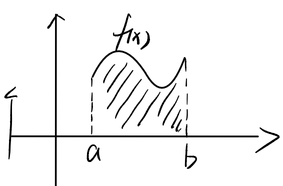
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a>0,\ a\neq 1)$

$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C \quad (a>0)$

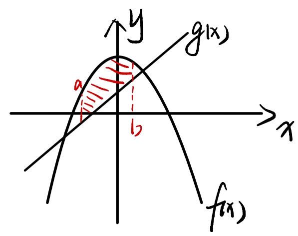
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$

图形： $\int_a^b f(x)\,dx$ 表示这个



意思

$\int_a^b [f(x)-g(x)]$ 表示这个



意思

{ 图像在 $y=0$ 以下，所得为负数
  $f(x)-g(x)$ 时，用高的减低的

定积分基本性质：

① $\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ （k为常数）

② $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

③ $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ （其中 $a<c<b$）

极坐标：

$$\begin{cases} x=\rho\cdot\cos\theta \\ y=\rho\cdot\sin\theta \end{cases}$$

$\rho^2=x^2+y^2$

$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$

圆：$\begin{cases} x=a+r\cdot\cos\theta \\ y=b+r\cdot\cos\theta \end{cases}$ 圆心 (a,b) 半径 r

椭圆：$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\cos\theta \end{cases}$

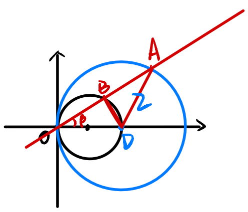
$\boxed{\rho\text{的几何意义}}$ ☆

极径 ρ 表示极坐标平面内点 M 到极点 O 的距离

一般应用在过极点的直线与曲线相交，所得弦长问题.

eg：已知 C_1：$\rho=4\cos\theta$，C_2：$\rho=2\cos\theta$，C_2 与极轴交于 O，D 两点，

射线 l：$\theta=\beta$ ($\rho>0$，$0<\beta<\pi$) 与 C_1，C_2 相交于 A，B 两点，已知 $S_{\triangle ABD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，求 β.



设：$A(\rho_1,\beta)$　$B(\rho_2,\beta)$

则 $|AB|=|\rho_1-\rho_2|=|4\cos\beta-2\cos\beta|=2\cos\beta$

$S=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|OD|\cdot\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin2\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$　$\beta=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{\pi}{3}$

参数方程中 t 的几何意义：

1. 定点 $P(x_0,y_0)$，倾斜角 α，$\begin{cases} x=x_0+t\cdot\cos\alpha \\ y=y_0+t\cdot\sin\alpha \end{cases}$ （t 为参数）

$|t|$ 的几何意义是直线上的点 P 到 $P_0(x_0,y_0)$ 的距离.

- $t>0$，则 $\overrightarrow{M_0M}$，向上
- $t=0$，则 M_0 与 M 点重合
- $t<0$，则 $\overrightarrow{M_0M}$，向下

① $|AB|=|t_A-t_B|$，A，B 两点到 M_0 的距离 $|t_A|$，$|t_B|$

② A，B 两点中点 $\frac{t_A+t_B}{2}$，若 M_0 为 AB 中点，$t_A+t_B=0$

2. $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}$ （t 为参数）. 当 $a^2+b^2\neq1$ 时，应先化成标准形式.

3. 做题三步：① 直线参数方程

② 曲线普通方程

③ 代入后韦达即可

柯西不等式：

在求二元或多元最值问题

在求二元或多元不等式证明

基本：$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq (ac+bd)^2$，取等条件：$ad=bc$ $\left(\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\right)$

拓展：$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) \geq (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_nb_n)^2$

取等条件：$a_1:b_1=a_2:b_2=a_3:b_3=\cdots=a_n:b_n$（当 $a_i=0$ 或 $b_i=0$ 时，a_i 和 b_i 都等于0，不考虑 $a_i:b_i$）$i=1,2,3,\cdots,n$

权方和不等式：

在 $a,b,x,y>0$ 时，$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$，当 $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$ 时取等

拓展：$a_i>0$，$b_i>0$，则 $\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n}$ 当 $a_i=\lambda b_i$ 时取等

$a_i>0$，$b_i>0$，$m>0$，则 $\frac{a_1^{m+1}}{b_1^m}+\frac{a_2^{m+1}}{b_1^m}+\cdots+\frac{a_n^{m+1}}{b_n^m} \geq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^{m+1}}{b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n}$ 当 $a_i=\lambda b_i$ 时取等

幂平均不等式：

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 \geq \frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2$$

琴生不等式：

若定义在某区间上的函数 $f(x)$，对于定义域中任意两点 x_1, x_2 $(x_1\neq x_2)$

有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ or $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

$f(x)$ 凹函数 $f(x)$ 凸函数

对数平均不等式：$a>b>0$，

$$b<\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}<\sqrt{ab}<\frac{a-b}{\ln a-\ln b}<\frac{a+b}{2}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}<a$$